UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01030031 7

QA
374
G67

OF
TORONTO
LIBRARY

MatAn
1743m

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES DES DEUX PREMIERS ORDRES,

PAR JOSEPH GRAINDORGE,

Docteur spécial en sciences physico-mathématiques,
répétiteur à l'École des mines de Liége, membre de la Société royale
des sciences de Liége, etc.

Liège : 1869
Bruxelles : F. Hayez
1872

4857
2/12/97

QA
374
G67

INTRODUCTION HISTORIQUE.

L'intégration des équations aux dérivées partielles forme une des théories les plus importantes de l'analyse. Elle doit principalement cette importance aux nombreux problèmes qui conduisent à des équations de cette espèce. Ses applications se présentent, pour ainsi dire à chaque pas, dans la géométrie, la physique mathématique et la mécanique.

Les premiers travaux sur cet objet sont dus à *d'Alembert* (1). On en trouve cependant déjà des traces dans un mémoire de *N. Bernoulli* sur les trajectoires orthogonales (2). *D'Alembert* a montré que les intégrales de ces équations doivent renfermer des fonctions arbitraires, et il a découvert le moyen de déterminer le nombre de ces fonctions. Cette recherche a aussi occupé *Condorcet* (3). Toutefois, suivant *Cousin* (4), qui a traité le même sujet (5), *Euler* avait, en 1734, intégré une équation de ce genre (6); il est donc le véritable inventeur de ce calcul, qu'il a développé d'une manière très-simple (7). En outre, il a donné un grand nombre de détails sur les équations d'un ordre supé-

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris;* 1767 et 1769.
(2) *Acta eruditorum;* année 1720.
(3) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris;* 1770, 1771 et 1772.
(4) Montucla, *Histoire des mathématiques,* t. III, p. 344.
(5) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris;* 1778, 1785 et 1784.
(6) *Mémoires de Pétersbourg,* t. VII.
(7) Euler, *Institutiones calculi integralis,* t. III. Petropolis; 1770.

rieur au premier. *D'Alembert*, qui en fit les premières applications aux sciences physiques, n'avait rien enseigné sur la nature des intégrales de ces équations. C'est seulement en 1773, que *Laplace* (1) a trouvé le moyen de reconnaître si une telle équation peut avoir une intégrale donnée. Il a indiqué en même temps une méthode de réduction de l'équation du second ordre à un système d'équations différentielles ordinaires; mais il n'a traité que les équations linéaires à deux variables indépendantes. Dans le même travail, on trouve cette remarque importante que les équations différentielles ordinaires sont des cas particuliers des équations aux dérivées partielles. Il suffit, dit *Laplace*, d'égaler à zéro les coefficients des dérivées relatives à l'une des deux variables, y par exemple.

La méthode de *Laplace* suppose que l'on fait disparaître deux des trois premiers termes de l'équation proposée. *Legendre* (2), en étudiant l'équation des surfaces minimums, a été conduit à une méthode nouvelle d'intégration qu'il a pu étendre aux équations non linéaires du second ordre à deux variables indépendantes. Cette question des surfaces minimums avait déjà été traitée par *Monge* (3), qui en a donné une solution remarquable, déduite de considérations géométriques. Peu de temps après (4), *Monge* exposait une méthode d'intégration des équations linéaires du second ordre, méthode abandonnée plus tard, et de laquelle il n'était cependant pas difficile de conclure plusieurs des résultats trouvés longtemps après par *Ampère*.

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*; 1774.

(2) *Ibid.*; 1787.

(3) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie.* — *Mémoires des savants étrangers de l'Académie de Paris*; 1773. — *Miscellanea taurinensia*; 1770-1773.

(4) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*; 1784.

Lagrange a fait faire le plus grand pas à cette théorie (1), en intégrant les équations du premier ordre à un nombre quelconque de variables. Il est le premier qui, après *Euler*, se soit occupé de l'intégration par les séries (2), méthode appliquée plus tard avec tant de succès par *Poisson* (3). Dans son premier mémoire, *Lagrange* a résolu le problème pour les équations du premier ordre à deux variables indépendantes. Il a montré que, si l'on peut trouver une intégrale du système de trois équations ordinaires du premier ordre, à quatre variables, auquel il ramène le problème, il ne reste plus à intégrer que deux équations différentielles du premier ordre à deux variables chacune.

En 1784, *Charpit* présenta à l'Académie des Sciences un mémoire, dans lequel il exposait une méthode d'intégration des équations non linéaires à deux variables indépendantes. Cette méthode consistait à joindre, à l'équation proposée, une autre de la même forme, de manière à en déduire les valeurs des dérivées partielles p, q, puis à intégrer l'expression $dz = pdx + qdy$. *Charpit* étant mort peu de temps après, son travail ne fut pas imprimé. Cependant, on trouve dans plusieurs endroits des applications de sa méthode (4). Il l'avait étendue au cas de plusieurs variables indépendantes; mais elle conduit alors à des calculs très-pénibles.

Legendre a aussi donné (5) une solution par un changement de variables indépendantes, en prenant, pour variables nouvelles,

(1) *Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin;* 1772, 1774, 1779 et 1785.

(2) *Mécanique analytique.*

(3) *Journal de l'École polytechnique*, 15e cahier. — *Théorie de la chaleur.*

(4) Lacroix, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, t. II, p. 548. Paris; 1814. — Boole, *Ueber eine partielle Differentialgleichung*, Journal de Crelle, t. LXI., p. 323.

(5) *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris;* 1787.

les dérivées p, q, dont x, y, deviennent alors des fonctions. *Pfaff* (1) essaya vainement d'étendre la méthode de *Lagrange* aux équations contenant un nombre quelconque de variables. En suivant une autre route, et, en généralisant la question, il en donna une solution remarquable. Sa méthode porte le nom de *Problème de Pfaff :* elle consiste dans l'intégration de plusieurs systèmes d'équations ordinaires simultanées, dont chacun renferme deux variables de moins que le précédent ; elle a été reprise plus tard par beaucoup de géomètres, entre autres par MM. *Natani* (2) et *Clebsch* (3). Elle a été aussi l'objet des premiers travaux de *Jacobi* (4), qui y apporta quelques simplifications remarquables. Cependant, une étude plus approfondie des équations de la mécanique (5), établies par *Lagrange* (6), et transformées par *Poisson* (7) et *Hamilton* (8), ne tarda pas à faire suivre au géomètre allemand une nouvelle voie : il reconnut que là devait se trouver la solution du problème que ses prédécesseurs n'avaient pu résoudre complétement. *Hamilton* avait montré la connexion qui existe entre l'intégration des équations de la dynamique et l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre.

(1) Pfaff, *Methodus generalis aequationes differentiarum partialium integrandi,* Mémoires de l'Académie de Berlin ; 1814-1815, p. 76.

(2) Natani, *Ueber totale und partiellen Differentialgleichungen,* Journal de Crelle, t. LVIII.

(3) Clebsch, *Ueber das Pfaffsche Probleme,* Journal de Crelle, t. LIX, LX, LXI et LXV.

(4) Jacobi, *Ueber die Pfaffsche Integrations Methode,* Journal de Crelle, tomes II et XVII. — *Journal de M. Liouville,* t. III.

(5) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik.* Berlin ; 1866.

(6) *Mécanique analytique.*

(7) Poisson, *Sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique,* Journal de l'École polytechnique, 15e cahier.

(8) Hamilton, *On a general method in dynamics,* Philosophical Transactions ; 1834.

Le problème de l'intégration d'un système de $2n$ équations différentielles simultanées auquel est ramené un problème quelconque de mécanique, dépend, d'après *Hamilton* (1), de la recherche d'une intégrale commune à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, dans lesquelles la fonction inconnue figure seulement par ses dérivées partielles. C'était une première étape vers la solution générale de ces deux problèmes. Mais, on le comprend, les magnifiques travaux d'*Hamilton* ne pouvaient être d'une grande utilité. Il fallait le grand génie de *Jacobi* pour élucider cette question. Reprenant les théories d'*Hamilton*, *Jacobi* (2) démontra d'abord qu'il est inutile de former les deux équations aux dérivées partielles du géomètre anglais. Il prouva qu'il suffit de chercher une solution complète d'une seule équation aux dérivées partielles du premier ordre, équation facile à construire. Mais ce n'était encore qu'une bien faible simplification, car, lorsque l'on voulait intégrer, par la méthode de *Pfaff*, cette équation aux dérivées partielles, on avait à intégrer plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires, dont l'un est précisément le système dynamique primitif. Cependant *Jacobi* montra plus tard qu'il suffit d'intégrer le premier système de *Pfaff*, pour obtenir une intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles proposée. Mais ce système, comme nous venons de le dire, n'est autre que le système dynamique proposé, et la simplication n'était qu'apparente. Après avoir essayé sans résultat de donner à la méthode de *Pfaff* une forme plus simple, *Jacobi* parvint à une nouvelle méthode d'intégration (3), qui a

(1) Hamilton, *On a geñeral method in dynamics*, Philosophical Transactions; 1835, p. 100.

(2) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik.* — J'ai résumé tous ces travaux dans mon *Mémoire sur l'intégration des équations de la mécanique*. Bruxelles; 1871.

(3) Jacobi, *Nova methodus aequationes differentiales partiales primi ordinis integrandi*, Journal de Crelle, t. LX, p. 1.

renversé toutes les autres; il a réduit le problème à l'intégration de certains systèmes d'équations simultanées linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. Il fit connaître en même temps une méthode remarquable d'intégration de ces systèmes. Il montra qu'il n'est pas nécessaire de connaître, pour chacun de ces systèmes, l'intégrale générale commune, mais seulement une solution particulière.

De son côté, M. *Georges Boole* (1), professeur à Cork, était arrivé, par une méthode un peu différente, aux mêmes résultats que *Jacobi*. Enfin, *Bour* (2), complétant les travaux remarquables de *Jacobi* sur les équations de la dynamique, et sur les équations aux dérivées partielles, a indiqué la marche à suivre pour trouver l'intégrale complète d'un système d'équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre non linéaires.

En 1819, *Cauchy* (3) avait déjà montré, antérieurement à *Jacobi*, que le problème de *Pfaff* peut se réduire à l'intégration d'un seul système d'équations différentielles ordinaires. Il donna plus tard (4) une nouvelle méthode pour l'intégration des équations aux dérivées partielles. La théorie de *Cauchy* a été exposée et perfectionnée par M. *Serret*, d'abord dans des notes insérées à la fin du *Traité élémentaire de calcul différentiel et intégral de Lacroix* (5), puis, dans les *Annales de l'École normale supérieure de Paris* (6). Enfin, tous les travaux de M. *Serret* ont été

(1) Boole, *On the differential equations of dynamics*, Philosophical Transactions; 1863, p. 485.

(2) Bour, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre*, Journal de l'École polytechnique, 39e cahier.

(3) *Bulletins de la Société philomatique;* 1819.

(4) Cauchy, *Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, Exercices d'analyse et de physique mathématique, t. II, p. 238; 1841.

(5) Tome II, pp. 237 et suiv. Paris; 1861.

(6) Tome III, pp. 143 et suiv.

réunis dans son *Traité de calcul différentiel et intégral* (1). M. *Bertrand* a aussi présenté une remarque importante sur un cas où l'analyse de *Cauchy* est en défaut.

La méthode de *Cauchy* doit son origine aux travaux d'*Ampère* sur les équations aux dérivées partielles. A la même époque que *Pfaff*, *Ampère* (2) crut devoir suivre une voie différente de celle qui avait été abordée par les géomètres précédents. Il chercha d'abord comment les différentiations successives d'une équation aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes, introduisent de nouvelles fonctions arbitraires, dérivées des fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale. S'appuyant sur ces recherches, il démontra, d'une manière générale, que l'intégrale primitive d'une équation aux dérivées partielles doit contenir autant de fonctions arbitraires qu'il y a d'unités dans l'ordre de cette équation; en outre, ces fonctions arbitraires doivent être indépendantes les unes des autres. Il montra aussi que cette condition n'est pas indispensable, lorsque l'intégrale est représentée par une série contenant une infinité de fonctions arbitraires dérivées les unes des autres, et pouvant servir à l'élimination. Il a donné, le premier, une théorie générale de l'intégration des équations du second ordre non linéaires, d'une forme particulière, question que *Monge* (3) avait déjà traitée, mais au point de vue géométrique, par une méthode qui manque de généralité. *Ampère* réduit l'intégration de ces équations à la recherche d'une solution d'un système de trois équations différentielles

(1) Tome II, p. 624. Paris; 1867-1868. — Voir aussi les *Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences;* octobre 1861.

(2) Ampère, *Considérations générales sur les équations différentielles partielles*, Journal de l'École polytechnique, 17e cahier. — Ibid., *Mémoire sur l'intégration des équations aux différentielles partielles*, Journal de l'École polytechnique, 18e cahier.

(3) *Application de l'analyse à la géométrie.*

ordinaires du premier ordre. Bien que la longueur de ce mémoire, et les notations adoptées par l'auteur, en rendent la lecture un peu gênante, cette difficulté, plus apparente que réelle, ne justifie nullement le silence gardé par tous les traités de calcul intégral à l'égard d'un procédé si remarquable.

Plus récemment, MM. *de Morgan* (1) et *Bour* (2) ont traité le même sujet : ils ont ramené la question à la recherche d'une solution commune d'un système de deux équations aux dérivées partielles linéaires, du premier ordre, problème rendu facile par les recherches de *Jacobi, Bour* et *Boole*. Nous n'avons trouvé aucun avantage réel dans les notations adoptées par M. *de Morgan* : il nous paraît que, tout en simplifiant l'écriture, elles exigent de trop grandes précautions pour l'utilité qu'elles présentent. Nous signalerons cependant ici une excellente idée de cet auteur, et que nous n'hésitons pas à introduire en français : au lieu de répéter à chaque instant les expressions *équations aux dérivées partielles du premier ordre, équations aux dérivées partielles du second ordre*, etc., il les appelle : *primordinal equations, biordinal equations*, etc. Dans l'intérêt de la concision et de la clarté, nous les traduirons par : *équations primordinales, biordinales*, etc.

M. *Georges Boole*, à qui l'on doit tant de travaux intéressants sur l'intégration des équations différentielles, a donné en 1862 (3), deux méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, traitées par *Ampère* et par M. *de Morgan*. Ces deux méthodes ne diffèrent pas beaucoup l'une de l'autre :

(1) De Morgan, *On some points in the theory of differential equations*, Transactions of the Cambridge philosophical society ; 1856, t. IX, pp. 516 et suiv.

(2) *Journal de l'École polytechnique*, 39e cahier, pp. 186 et suiv.

(3) Boole, *Ueber eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung*, Journal de Crelle, t. LXI, pp. 309 et suiv.

elles ne sont qu'une extension de la théorie de *Monge*. J'avais déjà eu le bonheur de suivre à peu près cette voie, sans y marcher aussi loin que M. *Boole*, lorsqu'on m'a communiqué le travail de l'illustre géomètre anglais. J'ai cru devoir indiquer la marche que j'ai suivie ; aidé des recherches de M. *Boole*, je suis parvenu, de mon côté, à faire rentrer dans le cas général, les cas particuliers que ce géomètre considérait comme des exceptions.

Je pourrais encore citer plusieurs mémoires remarquables auxquels a donné naissance le problème dont je vais m'occuper : mais ces travaux ne traitant que des questions particulières, je crois pouvoir me dispenser de les énumérer. Cependant, je ne puis passer sous silence un des principaux mémoires de M. *Catalan* (1) : celui où il traite une des questions qui ont le plus occupé les géomètres depuis *Lagrange* et *Monge*, et dont nous avons déjà parlé plus haut. C'est le problème *des surfaces minimums, ou des surfaces dont les rayons de courbure sont égaux et de signes contraires*. Dans ce travail, M. *Catalan* discute plusieurs surfaces nouvelles jouissant de propriétés intéressantes. En donnant à l'intégrale générale de l'équation du second ordre de ces surfaces une forme nouvelle, plus avantageuse que celle de *Monge*, dans certains cas, il a démontré l'existence des surfaces algébriques minimums.

Mon mémoire est divisé en deux parties : dans la première, je traite les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Je n'ai pas cru devoir parler de la méthode de *Cauchy*, parce qu'elle me paraît suffisamment développée dans les travaux de M. *Serret*. J'ai adopté la méthode de *Jacobi*, en la modifiant d'après les travaux de M. *Boole* et de *Bour*. J'ai appliqué cette méthode à

(1) *Journal de l'École polytechnique*, 37e cahier.

différents exemples qui en montrent l'utilité ; j'ai aussi traité plusieurs applications d'intégration d'équations simultanées à plusieurs variables.

Je n'ai pas exposé la théorie de l'intégration des équations de la dynamique. Elle serait ici superflue : à la rigueur, elle n'y doit occuper qu'une place historique (¹).

J'ai cru inutile de traiter le *problème de Pfaff*. Cette méthode s'occupant de la transformation des équations différentielles plutôt que de leur intégration, je n'aurais pu en parler sans m'écarter beaucoup trop du but que je me suis proposé.

Dans la seconde partie, je me suis occupé des équations du second ordre : j'y ai développé surtout les méthodes de *Monge* et d'*Ampère* que j'ai appliquées à différents cas qui avaient échappé à ces géomètres. En traitant la méthode d'*Ampère*, j'ai simplifié la notation qu'il a employée dans ses deux mémoires. J'ai aussi donné quelques détails sur les méthodes de *Laplace* et de *Legendre*, sans insister cependant sur la dernière.

Dans l'exposé de la méthode de *Laplace*, j'ai fait usage des simplifications que j'ai apportées à la méthode de *Monge*. J'ai donné de nombreux exemples des théories de *Monge* et d'*Ampère*, en appliquant la méthode de *Jacobi* aux équations du premier ordre, auxquelles j'ai ramené le problème. Je suis ainsi parvenu, chaque fois, à simplifier considérablement les calculs pénibles, et les transformations nombreuses qu'avaient dû faire *Monge*, *Legendre* et *Ampère*.

Je n'ai pas cru nécessaire de comprendre dans mon travail les méthodes d'intégration des équations du second ordre par les

(¹) Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik*. — Voir aussi mon *Mémoire sur l'intégration des équations de la mécanique*. — Bour, *Mémoire des savants étrangers*. — Gilbert, *Sur l'intégration des équations de la dynamique*, Bulletins de l'Académie royale de Belgique ; 1864.

séries, et les intégrales définies. Ces méthodes sont exposées en détail dans les traités ordinaires de calcul intégral (1).

La première partie de mon mémoire était déjà très-avancée, lorsque j'ai eu connaissance du mémoire de M. *Imschenetsky*, professeur à l'Université de Kazan, sur la même question, mémoire que M. *Houël* venait de traduire (2) : j'y ai puisé différents renseignements très-utiles sur les équations du premier ordre. Je suis, en outre, parvenu à me procurer, grâce à l'obligeance de M. *Imschenetsky*, l'original russe d'un mémoire publié par cet auteur sur les équations du second ordre (3). J'y ai trouvé, entre autres choses nouvelles, une généralisation, encore inconnue parmi nous, de la méthode de *Laplace* (4).

En outre, la théorie fondée par *Ampère* n'est pas générale : elle permet de trouver l'intégrale générale seulement dans certains cas particuliers. M. *Imschenetsky* a fait voir (5) que l'on peut, dans le cas général, obtenir l'intégrale primitive. La marche qu'il suit repose sur la méthode de *la variation des constantes arbitraires*. Il arrive ainsi à montrer l'existence d'un nombre illimité de transformations qui conservent à l'équation proposée son type primitif, ou la réduisent à une équation biordinale linéaire. Quoiqu'il dise lui-même, dans sa préface, que la méthode d'*Am-*

(1) Lacroix, *Traité de calcul différentiel et intégral*, t. II, pp. 657 et suiv. Paris; 1814. — Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 672. Paris; 1868. — Souchon, *Éléments de calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 551. Paris; 1870. D'ailleurs, presque tous les traités de calcul différentiel et intégral parlent de cette méthode.

(2) V. Imschenetsky, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, traduit du russe, par Houël. Paris; 1869.

(3) V. Imschenetsky, *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes*, Mémoires de l'Université de Kazan; 1868.

(4) *Ibid.*, p. 49.

(5) *Ibid.*, p. 128.

père est peu connue à cause de la difficulté qu'offre la lecture de ses deux mémoires, il me paraît que l'on pouvait simplifier davantage la notation du savant français, et je pense en avoir donné la preuve.

MÉMOIRE

SUR

L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS

AUX

DÉRIVÉES PARTIELLES DES DEUX PREMIERS ORDRES.

PREMIÈRE PARTIE.

DES ÉQUATIONS PRIMORDINALES.

I.

DÉFINITIONS. — TOUTE ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ADMET UNE INTÉGRALE. — INTÉGRALE COMPLÈTE D'UNE ÉQUATION PRIMORDINALE. — DÉTERMINATION DE L'INTÉGRALE SINGULIÈRE, ET DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE.

1. Une équation aux dérivées partielles est une équation qui renferme un certain nombre de variables indépendantes, une ou plusieurs fonctions inconnues de ces variables, et les dérivées partielles de ces fonctions par rapport à ces variables.

Généralement, le nombre des équations de cette espèce est égal au nombre des fonctions inconnues : nous nous occuperons seulement du cas d'une seule équation renfermant une seule fonction inconnue.

2. Une équation aux dérivées partielles est *du premier ordre*, lorsqu'elle ne renferme que les dérivées partielles du premier ordre de la fonction inconnue. Nous l'appellerons *équation primordinale*.

D'après cela, la forme la plus générale d'une telle équation est

$$F(z, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0, \quad \dots \quad (1)$$

$q_1, q_2, \dots q_n$, étant les variables indépendantes, z la fonction inconnue, $p_1, p_2, \dots p_n$, les dérivées partielles du premier ordre de cette fonction, prises par rapport à ces variables, telles que

$$p_i = \frac{dz}{dq_i}.$$

3. Une équation primordinale est *linéaire*, lorsqu'elle ne renferme les dérivées $p_1, p_2, \dots p_n$ qu'au premier degré, les quantités $z, q_1, q_2, \dots q_n$, pouvant d'ailleurs y entrer d'une manière quelconque.

4. *Intégrer l'équation* (1), c'est trouver la valeur la plus générale de la fonction z, telle qu'en la substituant, ainsi que ses dérivées partielles dans cette équation, celle-ci devienne une identité. Cette fonction inconnue s'appelle *l'intégrale générale* de l'équation primordinale.

5. Avant de donner des détails sur les diverses espèces d'intégrales, et sur leur degré de généralité, nous énoncerons le théorème suivant que l'on admet généralement sans démonstration :

Théorème. — *Une équation quelconque aux dérivées partielles admet toujours une intégrale renfermant une ou plusieurs fonctions arbitraires dont le nombre est d'autant plus grand que l'équation est d'un ordre plus élevé.*

On en trouve une démonstration dans le *Traité de calcul différentiel et intégral* de M. *Timmermans*, professeur à l'Université de Gand (*). Elle repose sur le développement en séries;

(*) Timmermans, *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral*, pp. 456 et suiv. Gand; 1860. — Duhamel, *Cours d'analyse*, t. II, p. 178; 1847.

mais elle manque de généralité : c'est d'ailleurs le seul moyen que l'on ait jusque maintenant de démontrer l'existence d'une intégrale d'une telle équation. Cette proposition a aussi été démontrée par Ampère (*) : sa solution exige beaucoup de préliminaires que nous ne pouvons introduire ici.

6. Lagrange a nommé *intégrale complète* (**) d'une équation primordinale non linéaire à n variables indépendantes, une équation entre les variables indépendantes, la fonction z de ces variables, qui satisfait à l'équation proposée et renferme n constantes distinctes, sans compter la constante arbitraire qui est toujours ajoutée à la fonction z et dont nous ne parlerons pas.

Cette intégrale, qui est la plus simple, sert, comme nous le verrons plus loin, à déterminer toutes les autres; elle a la forme :

$$z = f(q_1, q_2, \dots q_n, a_1, a_2, \dots a_n), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$a_1, a_2, \dots a_n$, étant des constantes arbitraires.

En effet, si nous différentions cette équation par rapport à chacune des n variables $q_1, q_2, \dots q_n$, nous obtiendrons n équations :

$$p_1 = \frac{df}{dq_1}, \quad p_2 = \frac{df}{dq_2}, \dots \quad p_n = \frac{df}{dq_n}, \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

et, en y joignant l'équation (2), nous aurons $n + 1$ équations entre lesquelles nous pourrons éliminer les n constantes arbitraires; on trouve ainsi une relation entre $z, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, \dots p_n$, qui sera l'équation proposée.

7. Une intégrale complète n'est pas cependant l'expression la plus générale de la fonction qui vérifie l'équation proposée. Nous avons supposé au numéro précédent que $a_1, a_2, \dots a_n$, sont des constantes arbitraires, et nous avons déduit l'équation (1) de la combinaison des équations (2) et (3). Or, rien ne nous empêche de supposer que $a_1, a_2, \dots a_n$, au lieu d'être des constantes,

(*) Ampère. *Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles*, Journal de l'École polytechnique, 17e cahier, p. 583.

(**) M. De Morgan l'appelle *intégrale primaire*. De Morgan, *On some points in the theory of differential equations*, Transactions of the Cambridge philosophical society, t. IX, p. 535.

soient des fonctions des variables indépendantes $q_1, q_2, \dots q_n$, déterminées de telle manière que $p_1, p_2, \dots p_n$, conservent la même forme que dans le cas où $a_1, a_2, \dots a_n$, sont des constantes : il est évident qu'alors l'équation (2) sera encore une solution de la proposée.

8. Afin de trouver à quelles conditions doivent alors satisfaire les quantités $a_1, a_2, \dots a_n$, différentions, dans la nouvelle hypothèse, l'équation (2) par rapport aux variables indépendantes; il viendra :

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{df}{dq_1} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dq_1} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dq_1} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dq_1},\\
p_2 &= \frac{df}{dq_2} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dq_2} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dq_2} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dq_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
p_n &= \frac{df}{dq_n} + \frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dq_n} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dq_n} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dq_n}.
\end{aligned}
$$

Pour que ces équations conservent la même forme que les équations (3), il est nécessaire et suffisant que les fonctions a_1, $a_2, \dots a_n$, vérifient les n équations :

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dq_1} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dq_1} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dq_1} = 0,\\
&\frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dq_2} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dq_2} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dq_2} = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{df}{da_1}\frac{da_1}{dq_n} + \frac{df}{da_2}\frac{da_2}{dq_n} + \cdots + \frac{df}{da_n}\frac{da_n}{dq_n} = 0.
\end{aligned}
\right\} \quad . \ . \ . \quad (4)
$$

Ces équations sont linéaires par rapport à $\frac{df}{da_1}, \frac{df}{da_2}, \dots \frac{df}{da_n}$; en représentant par Δ le déterminant

$$
\Delta = \begin{vmatrix}
\frac{da_1}{dq_1} & \frac{da_2}{dq_1} & \cdots & \frac{da_n}{dq_1}\\
\frac{da_1}{dq_2} & \frac{da_2}{dq_2} & \cdots & \frac{da_n}{dq_2}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
\frac{da_1}{dq_n} & \frac{da_2}{dq_n} & \cdots & \frac{da_n}{dq_n}
\end{vmatrix},
$$

nous en déduirons, en les résolvant par rapport à $\frac{df}{da_1}$, $\frac{df}{da_2}$, ... $\frac{df}{da_n}$:

$$\frac{df}{da_1}\Delta = 0, \quad \frac{df}{da_2}\Delta = 0, \cdots \frac{df}{da_n}\Delta = 0.$$

Or, si le déterminant Δ n'est pas nul, nous aurons les n équations :

$$\frac{df}{da_1} = 0, \quad \frac{df}{da_2} = 0, \cdots \frac{df}{da_n} = 0,$$

lesquelles suffisent pour déterminer les n fonctions $a_1, a_2, \ldots a_n$, au moyen de $q_1, q_2, \ldots q_n$. En substituant ces valeurs dans l'équation (2), on obtiendra une expression qui ne renfermera aucune quantité arbitraire, et qui sera cependant une solution de l'équation (1). Cette intégrale a été appelée par Lagrange une *intégrale singulière.*

Si le déterminant Δ est nul, on sait, par un théorème dû à Jacobi (*), que les n fonctions $a_1, a_2, \ldots a_n$, qui y entrent ne sont pas indépendantes les unes des autres; on satisfera à cette condition $\Delta = 0$, en supposant que quelques-unes des quantités a_1, $a_2, \ldots a_n$, sont des fonctions arbitraires des autres. On y satisfera de la manière la plus générale (**), en écrivant que l'une d'elles est une fonction arbitraire de toutes les autres; par exemple, en posant

$$a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}).$$

L'intégrale (2) devient alors

$$z = f\big(q_1, q_2, \ldots q_n, a_1, a_2, \ldots a_{n-1}, \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})\big). \quad (5)$$

Cette solution, qui contient une fonction arbitraire des quantités $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, est celle qui a reçu de Lagrange le nom *d'intégrale générale.*

9. Si maintenant nous introduisons la condition

$$a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}),$$

(*) Jacobi, *De determinantibus functionalibus,* Journal de Crelle; t. XXII, p. 319. — Ibid., *Vorlesungen über Dynamik,* p. 100. Berlin; 1866. — Bertrand, *Traité de calcul différentiel,* t. I, p. 66. — Baltzer, *Théorie des déterminants,* traduction de M. Houël, p. 114. Paris, 1861.

(**) Nous reviendrons plus loin sur cette proposition (n° 11).

dans les n équations (4) qui déterminent les quantités $a_1, a_2, \ldots$, nous pourrons en déduire les valeurs de ces quantités correspondant à une forme donnée de la fonction arbitraire φ.

En effet, en différentiant successivement a_n par rapport à q_1, $q_2, \ldots q_n$, il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{da_n}{dq_1} &= \frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{dq_1} + \frac{d\varphi}{da_2}\frac{da_2}{dq_1} + \ldots + \frac{d\varphi}{da_{n-1}}\frac{da_{n-1}}{dq_1},\\
\frac{da_n}{dq_2} &= \frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{dq_2} + \frac{d\varphi}{da_2}\frac{da_2}{dq_2} + \ldots + \frac{d\varphi}{da_{n-1}}\frac{da_{n-1}}{dq_2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{da_n}{dq_n} &= \frac{d\varphi}{da_1}\frac{da_1}{dq_n} + \frac{d\varphi}{da_2}\frac{da_2}{dq_n} + \ldots + \frac{d\varphi}{da_{n-1}}\frac{da_{n-1}}{dq_n};
\end{aligned}$$

en substituant ces valeurs dans les équations (4), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{df}{da_1} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_1}\right)\frac{da_1}{dq_1} + \left(\frac{df}{da_2} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_2}\right)\frac{da_2}{dq_1} + \ldots + \left(\frac{df}{da_{n-1}} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_{n-1}}\right)\frac{da_{n-1}}{dq_1} = 0,\\
&\left(\frac{df}{da_1} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_1}\right)\frac{da_1}{dq_2} + \left(\frac{df}{da_2} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_2}\right)\frac{da_2}{dq_2} + \ldots + \left(\frac{df}{da_{n-1}} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_{n-1}}\right)\frac{da_{n-1}}{dq_2} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\left(\frac{df}{da_1} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_1}\right)\frac{da_1}{dq_n} + \left(\frac{df}{da_2} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_2}\right)\frac{da_2}{dq_n} + \ldots + \left(\frac{df}{da_{n-1}} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_{n-1}}\right)\frac{da_{n-1}}{dq_n} = 0.
\end{aligned}$$

De ces équations on tire les $n - 1$ conditions suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{df}{da_1} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_1} &= 0,\\
\frac{df}{da_2} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_2} &= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
\frac{df}{da_{n-1}} + \frac{df}{d\varphi}\frac{d\varphi}{da_{n-1}} &= 0,
\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (6)$$

qui serviront à déterminer les $n - 1$ quantités $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, en fonction des variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots q_n$.

L'intégrale générale sera donc représentée par ces $n - 1$ équa-

tions (6), jointes à l'équation (5). La méthode que nous venons d'employer pour la déterminer s'appelle *méthode de la variation des constantes arbitraires* (*).

10. Si l'intégrale complète est donnée sous forme implicite :

$$\psi(q_1, q_2, \ldots q_n, z, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

on pourra, comme dans le cas précédent, en appliquant la *méthode de la variation des constantes arbitraires*, obtenir soit l'intégrale singulière, soit l'intégrale générale.

Si nous prenons, en effet, les dérivées de l'équation précédente par rapport à q_1, q_2, ... q_n, il viendra les n équations :

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d\psi}{dq_1} + \dfrac{d\psi}{dz}p_1 + \dfrac{d\psi}{da_1}\dfrac{da_1}{dq_1} + \dfrac{d\psi}{da_2}\dfrac{da_2}{dq_1} + \cdots + \dfrac{d\psi}{da_n}\dfrac{da_n}{dq_1} = 0, \\
\dfrac{d\psi}{dq_2} + \dfrac{d\psi}{dz}p_2 + \dfrac{d\psi}{da_1}\dfrac{da_1}{dq_2} + \dfrac{d\psi}{da_2}\dfrac{da_2}{dq_2} + \cdots + \dfrac{d\psi}{da_n}\dfrac{da_n}{dq_2} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{d\psi}{dq_n} + \dfrac{d\psi}{dz}p_n + \dfrac{d\psi}{da_1}\dfrac{da_1}{dq_n} + \dfrac{d\psi}{da_2}\dfrac{da_2}{dq_n} + \cdots + \dfrac{d\psi}{da_n}\dfrac{da_n}{dq_n} = 0.
\end{array}\right\} . \quad (8)$$

Or, si nous posons

$$\frac{d\psi}{da_1} = 0, \quad \frac{d\psi}{da_2} = 0, \cdots \frac{d\psi}{da_n} = 0,$$

nous aurons n équations pour déterminer les n quantités a_1, a_2, ... a_n, qui, substituées dans l'équation (7), donneront l'intégrale singulière. Il nous restera les n équations suivantes

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{d\psi}{dq_1} + \dfrac{d\psi}{dz}p_1 = 0, \\
\dfrac{d\psi}{dq_2} + \dfrac{d\psi}{dz}p_2 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{d\psi}{dq_n} + \dfrac{d\psi}{dz}p_n = 0,
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

(*) LAGRANGE, *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale de Berlin;* 1772, pp. 368 et suiv.

lesquelles détermineront les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, comme dans le cas où $a_1, a_2, \ldots a_n$, sont des constantes arbitraires.

En supposant que a_n soit une fonction arbitraire des $n - 1$ quantités $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$,

$$a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}),$$

nous aurons :

$$\begin{aligned}
\frac{da_n}{dq_1} &= \frac{da_n}{da_1}\frac{da_1}{dq_1} + \frac{da_n}{da_2}\frac{da_2}{dq_1} + \cdots + \frac{da_n}{da_{n-1}}\frac{da_{n-1}}{dq_1},\\
\frac{da_n}{dq_2} &= \frac{da_n}{da_1}\frac{da_1}{dq_2} + \frac{da_n}{da_2}\frac{da_2}{dq_2} + \cdots + \frac{da_n}{da_{n-1}}\frac{da_{n-1}}{dq_2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{da_n}{dq_n} &= \frac{da_n}{da_1}\frac{da_1}{dq_n} + \frac{da_n}{da_2}\frac{da_2}{dq_n} + \cdots + \frac{da_n}{da_{n-1}}\frac{da_{n-1}}{dq_n}.
\end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans les équations (8), il vient :

$$\begin{aligned}
&\frac{d\psi}{dq_1} + \frac{d\psi}{dz}p_1 + \frac{da_1}{dq_1}\left(\frac{d\psi}{da_1} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_1}\right) + \cdots + \frac{da_{n-1}}{dq_1}\left(\frac{d\psi}{da_{n-1}} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_{n-1}}\right) = 0,\\
&\frac{d\psi}{dq_2} + \frac{d\psi}{dz}p_2 + \frac{da_1}{dq_2}\left(\frac{d\psi}{da_1} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_1}\right) + \cdots + \frac{da_{n-1}}{dq_2}\left(\frac{d\psi}{da_{n-1}} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_{n-1}}\right) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d\psi}{dq_n} + \frac{d\psi}{dz}p_n + \frac{da_1}{dq_n}\left(\frac{d\psi}{da_1} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_1}\right) + \cdots + \frac{da_{n-1}}{dq_n}\left(\frac{d\psi}{da_{n-1}} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_{n-1}}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Or, ces équations se réduisent à la même forme que les équations (9), c'est-à-dire à la même forme que dans l'hypothèse où $a_1, a_2, \ldots a_n$, sont des constantes, si l'on pose les $n - 1$ conditions :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\psi}{da_1} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_1} &= 0,\\
\frac{d\psi}{da_2} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_2} &= 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\frac{d\psi}{da_{n-1}} + \frac{d\psi}{da_n}\frac{da_n}{da_{n-1}} &= 0,
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots \quad (10)$$

lesquelles serviront à déterminer $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, dont a_n est une fonction arbitraire, et l'intégrale générale se formera comme dans le numéro précédent.

Dans ce cas, comme dans celui de l'intégrale singulière, et dans celui de l'intégrale complète, les équations (9) donneront les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$; par suite, dans les trois cas, l'équation primordinale sera la même.

Ainsi, *l'intégrale générale de l'équation proposée est une fonction des* n *variables indépendantes, renfermant* n — 1 *fonctions indépendantes entre elles* $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$, *de ces variables indépendantes, et une fonction arbitraire* φ *de ces quantités.*

11. **Remarque.** — Le nombre des constantes arbitraires de l'intégrale complète étant n, on peut satisfaire à la condition $\Delta = 0$, de $n - 1$ manières, suivant que l'on prend $1, 2, 3, \ldots$ $n - 1$ relations entre ces n constantes, et l'on obtiendra ainsi $n - 1$ *classes de solutions générales.* Le degré de généralité de la solution est d'autant moindre que l'on suppose un plus grand nombre de constantes fonctions arbitraires de toutes les autres. *La solution la plus générale* est celle où il n'y a qu'une seule relation entre elles, c'est-à-dire une seule constante fonction des $n - 1$ autres. On laisse alors une indétermination plus grande que si l'on supposait, par exemple, deux constantes arbitraires fonctions des $n - 2$ autres. En effet, si nous supposons la fonction

$$a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1}),$$

développée suivant les puissances de l'une des constantes, de a_1, par exemple, les coefficients seront des fonctions arbitraires des $n - 2$ autres; par suite, la fonction a_n contiendra un nombre infini de fonctions des $n - 2$ quantités $a_2, a_3, \ldots a_{n-1}$.

On conclut facilement de là que la solution obtenue dans cette hypothèse est plus générale que celle que l'on obtiendrait dans l'hypothèse de deux constantes fonctions des $n - 2$ autres; de même, elle est plus générale que toutes les autres solutions possibles. L'indétermination des résultats est d'autant plus grande que les constantes ont moins de conditions à remplir.

II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS PRIMORDINALES LINÉAIRES.

12. Il est facile de conclure de la théorie précédente que le problème de l'intégration d'une équation primordinale quelconque peut être considéré comme résolu, lorsque l'on connaît l'intégrale complète de cette équation. Tout se réduit donc à trouver une méthode de recherche de cette intégrale complète. Mais, avant d'aborder le problème général pour une équation non linéaire, nous allons exposer la théorie de *l'intégration des équations primordinales linéaires*, c'est-à-dire dans lesquelles les dérivées du premier ordre n'entrent qu'au premier degré et ne sont pas multipliées entre elles.

13. La forme la plus générale de ces équations est :

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n = P, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$P_1, P_2, \ldots P_n$ et P désignant des fonctions données des variables $q_1, q_2, \ldots q_n, z$. Les quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, étant, par définition, les dérivées partielles de z, prises respectivement par rapport aux variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, doivent satisfaire à la condition

$$dz = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Or, on sait (*) que, si $u_1, u_2, \ldots u_n$, désignent des fonctions données de $q_1, q_2, \ldots q_n, z$, on obtient une équation primordinale linéaire, de la même forme que la proposée, en éliminant la fonction arbitraire φ de l'équation

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots u_n) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

14. *Réciproquement, on peut satisfaire à l'équation* (11) *en prenant pour* z *une fonction définie par l'équation* (13), *dans*

(*) Bertrand, *Traité de calcul différentiel*, t. I, p. 200.

laquelle φ *désigne une fonction arbitraire, et* $u_1, u_2, \ldots u_n$, *des fonctions convenables de* $q_1, q_2, \ldots q_n, z$.

Démonstration. — Si l'on différentie l'équation (13) par rapport aux variables indépendantes, il vient :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{du_1}\left(\frac{du_1}{dq_1}+\frac{du_1}{dz}p_1\right)+\cdots+\frac{d\varphi}{du_n}\left(\frac{du_n}{dq_1}+\frac{du_n}{dz}p_1\right)=0,\\
&\frac{d\varphi}{du_1}\left(\frac{du_1}{dq_2}+\frac{du_1}{dz}p_2\right)+\cdots+\frac{d\varphi}{du_n}\left(\frac{du_n}{dq_2}+\frac{du_n}{dz}p_2\right)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{d\varphi}{du_1}\left(\frac{du_1}{dq_n}+\frac{du_1}{dz}p_n\right)+\cdots+\frac{d\varphi}{du_n}\left(\frac{du_n}{dq_n}+\frac{du_n}{dz}p_n\right)=0.
\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Pour que l'équation (13) satisfasse à la proposée (11), il faut qu'en éliminant $p_1, p_2, \ldots p_n$, entre les équations (14) et (11), on obtienne une identité. Pour faire cette élimination, nous multiplierons les équations (14) respectivement par $P_1, P_2, \ldots P_n$, et nous ajouterons; nous aurons ainsi :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\varphi}{du_1}\left(P\frac{du_1}{dz}+P_1\frac{du_1}{dq_1}+\cdots+P_n\frac{du_1}{dq_n}\right)\\
&+\frac{d\varphi}{du_2}\left(P\frac{du_2}{dz}+P_1\frac{du_2}{dq_1}+\cdots+P_n\frac{du_2}{dq_n}\right)\\
&+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&+\frac{d\varphi}{du_n}\left(P\frac{du_n}{dz}+P_1\frac{du_n}{dq_1}+\cdots+P_n\frac{du_n}{dq_n}\right)
\end{aligned}\right\}=0.$$

Mais, cette équation devant être vérifiée quelle que soit la fonction φ, il faut que l'on ait identiquement :

$$\left.\begin{aligned}
&P\frac{du_1}{dz}+P_1\frac{du_1}{dq_1}+\cdots+P_n\frac{du_1}{dq_n}=0,\\
&P\frac{du_2}{dz}+P_1\frac{du_2}{dq_1}+\cdots+P_n\frac{du_2}{dq_n}=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&P\frac{du_n}{dz}+P_1\frac{du_n}{dq_1}+\cdots+P_n\frac{du_n}{dq_n}=0.
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (15)$$

Or, ces conditions ne peuvent exister (*) que si les fonctions $u_1, u_2, \ldots u_n$, sont telles que

$$u_1 = \text{const}, \quad u_2 = \text{const}, \ldots u_n = \text{const},$$

soient les n intégrales du système d'équations simultanées :

$$\frac{dq_1}{P_1} = \frac{dq_2}{P_2} = \cdots = \frac{dq_n}{P_n} = \frac{dz}{P}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

15. Il nous reste à démontrer que *toute solution de l'équation* (11) *est renfermée dans* (15).

Soit en effet :

$$f(q_1, q_2, \ldots q_n, z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

une solution quelconque de la proposée; nous aurons :

$$\begin{aligned} &\frac{df}{dq_1} + \frac{df}{dz} p_1 = 0, \\ &\frac{df}{dq_2} + \frac{df}{dz} p_2 = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{df}{dq_n} + \frac{df}{dz} p_n = 0. \end{aligned}$$

En substituant les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, déduites de ces dernières dans l'équation

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \cdots + P_n p_n = P, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

il vient :

$$P \frac{df}{dz} + P_1 \frac{df}{dq_1} + P_2 \frac{df}{dq_2} + \cdots + P_n \frac{df}{dq_n} = 0. \quad . \quad . \quad (18)$$

Or, les quantités $u_1, u_2, \ldots u_n$, étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots q_n, z$, on peut exprimer n des variables $q_1, q_2, \ldots q_n, z$, en fonction de l'une d'elles q_i, et de $u_1, u_2, \ldots u_n$; par suite,

$$f(q_1, q_2, \ldots q_n, z) = \psi_i(q_i, u_1, u_2, \ldots u_n). \quad . \quad . \quad (19)$$

(*) Serret, *Traité de calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 366.

Cette relation nous donne successivement :

$$\frac{df}{dz} = \frac{d\psi_i}{du_1}\frac{du_1}{dz} + \cdots + \frac{d\psi_i}{du_n}\frac{du_n}{dz},$$

$$\frac{df}{dq_1} = \frac{d\psi_i}{du_1}\frac{du_1}{dq_1} + \cdots + \frac{d\psi_i}{du_n}\frac{du_n}{dq_1},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{df}{dq_{i-1}} = \frac{d\psi_i}{du_1}\frac{du_1}{dq_{i-1}} + \cdots + \frac{d\psi_i}{du_n}\frac{du_n}{dq_{i-1}},$$

$$\frac{df}{dq_i} = \frac{d\psi_i}{du_1}\frac{du_1}{dq_i} + \cdots + \frac{d\psi_i}{du_n}\frac{du_n}{dq_i} + \frac{d\psi_i}{dq_i},$$

. . . . . .

$$\frac{df}{dq_n} = \frac{d\psi_i}{du_1}\frac{du_1}{dq_n} + \cdots + \frac{d\psi_i}{du_n}\frac{du_n}{dq_n}.$$

Si nous substituons toutes ces valeurs dans (18), il vient, en vertu des relations (15),

$$P_i \frac{d\psi_i}{dq_i} = 0.$$

Si, au lieu de q_i, on avait conservé une autre des variables, q_k, par exemple, c'est-à-dire si l'on avait exprimé n des variables q_1, q_2, ... q_n, z, en fonction de q_k et de u_1, u_2, ... u_n, on aurait obtenu l'équation

$$P_k \frac{d\psi_k}{dq_k} = 0.$$

En conservant successivement chacune des variables q, on obtiendrait les n équations suivantes :

$$P_1 \frac{d\psi_1}{dq_1} = 0, \quad P_2 \frac{d\psi_2}{dq_2} = 0, \cdots P_n \frac{d\psi_n}{dq_n} = 0;$$

or, ces conditions exigent que l'on ait :

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \ldots P_n = 0,$$

ou bien :

$$\frac{d\psi_1}{dq_1} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dq_2} = 0, \cdots \frac{d\psi_n}{dq_n} = 0.$$

Mais, en vertu de la proposée (11), les coefficients $P_1, P_2, \dots P_n$, ne peuvent être nuls : il faut donc que les fonctions ψ ne contiennent explicitement aucune des variables $q_1, q_2, \dots q_n$. Par conséquent, la fonction f est une fonction de $u_1, u_2, \dots u_n$ seulement, c'est-à-dire qu'elle est contenue dans la fonction φ.

16. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant qui donne l'intégrale la plus générale d'une équation primordinale linéaire :

THÉORÈME. — *Soit donnée une équation primordinale linéaire*

$$P_1 p_1 + P_2 p_2 + \dots + P_n p_n = P,$$

entre n *variables indépendantes* $q_1, q_2, \dots q_n$, *une fonction* z *de ces variables, et ses dérivées partielles,* $P_1, P_2, \dots P_n$; *et* P *étant des fonctions données des variables* $q_1, q_2, \dots q_n, z$; *il suffit, pour trouver l'intégrale générale de cette équation, d'intégrer le système d'équations ordinaires :*

$$\frac{dq_1}{P_1} = \frac{dq_2}{P_2} = \dots = \frac{dq_n}{P_n} = \frac{dz}{P}.$$

Si l'on désigne par

$$u_1 = \alpha_1, \quad u_2 = \alpha_2, \dots u_n = \alpha_n,$$

les n *intégrales de ces équations résolues par rapport aux constantes arbitraires, l'intégrale générale de la proposée sera*

$$\varphi(u_1, u_2, \dots u_n) = 0,$$

φ *désignant une fonction arbitraire.*

17. Remarque I. — La fonction arbitraire φ se détermine par les conditions du problème que l'on traite. Dans ce but, on impose généralement à la fonction z la condition de prendre une valeur particulière ζ, fonction des variables $q_1, q_2, \dots q_n$, lorsque l'on donne à l'une d'elles q_i une valeur déterminée.

Remarque II. — *Une intégrale quelconque* $u_1 = \alpha_1$ *du système* (16) *est une solution de l'équation proposée.*

III.

RECHERCHE DE L'INTÉGRALE COMPLÈTE D'UNE ÉQUATION PRIMORDINALE NON LINÉAIRE. — DÉFINITION DU PROBLÈME. — RÉDUCTION A L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES LINÉAIRES.

18. L'équation proposée étant donnée sous la forme

$$F(z, q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

la *méthode de Jacobi*, que nous exposerons dans la suite de ce travail, exige que l'on en fasse disparaître la fonction inconnue, ce qui peut toujours s'exécuter par l'introduction d'une nouvelle variable indépendante (*).

THÉORÈME. — *Étant donnée une équation primordinale renfermant la fonction inconnue, on peut la remplacer par une autre équation primordinale, dans laquelle la fonction inconnue n'entre plus explicitement, et où le nombre des variables indépendantes est augmenté d'une unité.*

Soit

$$f(q_1, q_2, \dots q_n, z) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

une relation entre les variables q_1, q_2, ... q_n, z, satisfaisant à la proposée (1).

Différentions cette équation successivement par rapport à q_1, q_2, ... q_n, nous aurons :

$$\frac{df}{dq_1} + \frac{df}{dz} p_1 = 0,$$

$$\frac{df}{dq_2} + \frac{df}{dz} p_2 = 0,$$

. . . . . .

$$\frac{df}{dq_n} + \frac{df}{dz} p_n = 0.$$

(*) JACOBI, *Nova methodus æquationes primi ordinis integrandi*, JOURNAL DE CRELLE, t. LX, p. 1. — Ibid., *Vorlesungen über Dynamik*, p. 257.

On tire de là :

$$p_1 = -\frac{\frac{df}{dq_1}}{\frac{df}{dz}}, \quad p_2 = -\frac{\frac{df}{dq_2}}{\frac{df}{dz}}, \cdots p_n = -\frac{\frac{df}{dq_n}}{\frac{df}{dz}};$$

substituant ces valeurs dans (1), on trouve :

$$\mathrm{F}\left(q_1, q_2, \cdots q_n, z, -\frac{\frac{df}{dq_1}}{\frac{df}{dz}}, -\frac{\frac{df}{dq_2}}{\frac{df}{dz}}, \cdots -\frac{\frac{df}{dq_n}}{\frac{df}{dz}}\right) = 0. \qquad (21)$$

Cette équation est de la forme

$$\psi\left(q_1, q_2, \cdots q_n, z, \frac{df}{dq_1}, \frac{df}{dq_2}, \cdots \frac{df}{dq_n}, \frac{df}{dz}\right) = 0; \qquad (21^{\text{bis}})$$

elle renferme, comme on voit, $n + 1$ variables indépendantes $q_1, q_2, \cdots q_n, z$, et les dérivées partielles du premier ordre d'une fonction f de ces variables indépendantes : mais la fonction inconnue f n'y entre pas explicitement.

La transformation de l'équation (1) en (21^{bis}) est évidemment toujours possible; par conséquent, le théorème est démontré.

Remarque. — Jacobi a employé (*) une transformation plus simple; il pose

$$\mathrm{V} = zt,$$

V étant la nouvelle fonction inconnue. Mais M. Bertrand a reconnu (**) que cette transformation, trop particulière, n'est pas applicable dans la plupart des cas. C'est pourquoi il est préférable de laisser complétement arbitraire la relation entre les deux fonctions inconnues.

(*) Jacobi, *Nova methodus integrandi*, etc.

(**) Leçons de M. Bertrand au Collége de France, 1852, 1855, 1868. Cette remarque a été faite aussi par M. Boole, *On the differential equations of dynamics*, Philosophical Transactions; 1863, p. 489.

19. Nous verrons dans les paragraphes suivants comment l'on peut trouver une intégrale complète de l'équation (21bis). On pourra mettre cette intégrale sous la forme explicite :

$$f = \varphi(q_1, q_2, \ldots q_n, z, a_1, a_2, \ldots a_n), \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots a_n$, sont des constantes arbitraires, les variables indépendantes étant $q_1, q_2, .. q_n, z$. On aura alors le théorème suivant :

Théorème. — *L'intégrale* (22) *étant connue, si l'on pose :*

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots q_n, z, a_1, a_2, \ldots a_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

z *étant alors une fonction des variables indépendantes* $q_1, q_2, \ldots q_n$, *on obtient, sous forme implicite, l'intégrale complète de la proposée.*

Démonstration. — L'équation (22) représentant, par hypothèse, l'intégrale de (21), on aura, en remplaçant dans (21) f par φ, l'équation

$$F\left(q_1, q_2, \ldots q_n, z, -\frac{\frac{d\varphi}{dq_1}}{\frac{d\varphi}{dz}}, -\frac{\frac{d\varphi}{dq_2}}{\frac{d\varphi}{dz}}, \ldots -\frac{\frac{d\varphi}{dq_n}}{\frac{d\varphi}{dz}}\right) = 0, \quad . \quad . \quad (24)$$

laquelle est évidemment une identité, et qui subsiste quelles que soient les valeurs des variables indépendantes $q_1, q_2, \ldots q_n, z$. Cela posé, de l'équation (23), dans laquelle z est une fonction des variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, on tire :

$$p_1 = \frac{dz}{dq_1} = -\frac{\frac{d\varphi}{dq_1}}{\frac{d\varphi}{dz}}, \ldots\ldots\ldots p_n = \frac{dz}{dq_n} = -\frac{\frac{d\varphi}{dq_n}}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

Substituant ces valeurs dans le premier membre de la proposée (1), on retrouve le premier membre de (24). Or, l'iden-

tité (24) est vérifiée pour une valeur quelconque de z (*); par conséquent, elle sera satisfaite pour la valeur particulière tirée de (25), et le théorème est démontré.

20. On conclut des deux numéros précédents, qu'il suffit de développer la théorie de l'intégration des équations primordinales ne renfermant pas explicitement la fonction inconnue.

La forme générale d'une telle équation est :

$$F(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

dans laquelle

$$p_i = \frac{dz}{dq_i}.$$

En outre, nous devons avoir la relation

$$dz = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \dots + p_n dq_n, \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

dont le second membre doit être une différentielle exacte. Toute la difficulté est donc ramenée à la recherche des quantités p_1, $p_2, \dots p_n$, en fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$, telles que les conditions d'intégrabilité de (26) soient vérifiées.

L'intégration de cette expression (26) nous donnera alors l'intégrale complète de (25), et le problème sera résolu (n° 12).

Or, la détermination des quantités $p_1, p_2, \dots p_n$, en fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$, exige n équations entre ces quantités. Nous en connaissons déjà une, l'équation (25) : par conséquent, il nous faut encore trouver $n - 1$ équations :

$$F_1 = a_1, F_2 = a_2, \dots F_{n-1} = a_{n-1}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

qui, jointes à l'équation

$$F = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

nous permettront de déterminer les quantités $p_1, p_2, \dots p_n$.

(*) Puisque, dans l'équation (24), z est considérée comme variable indépendante.

21. Les conditions d'intégrabilité de l'expression (26) sont comprises dans le type général

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) = \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right), \text{ (*) } \ldots\ldots \quad (28)$$

où l'on attribuera successivement à i, k, toutes les valeurs $1, 2, \ldots n$. Nous aurons ainsi $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de condition, de sorte que l'on aura $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ équations pour déterminer n inconnues, c'est-à-dire plus d'équations que d'inconnues; mais il existe, comme nous le verrons plus tard, des relations entre ces équations.

22. Dans les recherches qui vont suivre, nous ferons usage, pour simplifier nos formules, d'une notation introduite par Poisson (**), et que nous allons définir :

α, β étant deux fonctions des $2n$ variables $p_1, p_2, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, *Poisson* pose :

$$(\alpha, \beta) = \frac{d\alpha}{dq_1}\frac{d\beta}{dp_1} - \frac{d\alpha}{dp_1}\frac{d\beta}{dq_1} + \frac{d\alpha}{dq_2}\frac{d\beta}{dp_2} - \frac{d\alpha}{dp_2}\frac{d\beta}{dq_2} + \ldots + \frac{d\alpha}{dq_n}\frac{d\beta}{dp_n} - \frac{d\alpha}{dp_n}\frac{d\beta}{dq_n},$$

ou bien

$$(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{d\alpha}{dq_i}\frac{d\beta}{dp_i} - \frac{d\alpha}{dp_i}\frac{d\beta}{dq_i}\right) \ldots\ldots \quad (29)$$

(*) Il peut arriver que les quantités p soient simplement des fonctions des variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, ou bien des fonctions de ces variables, et, en outre, de quelques-unes des quantités p. Lorsque nous considérerons p_i comme une fonction explicite de $q_1, q_2, \ldots q_n$, nous écrirons sa dérivée, par rapport à q_k par exemple, $\frac{dp_i}{dq_k}$ sans crochets : si, au contraire, nous voulons prendre la dérivée, par rapport à q_k, de p_i considérée comme une fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, et de quelques-unes des quantités p, nous écrirons $\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right)$. En d'autres termes, nous renfermerons entre crochets les dérivées totales des quantités p, et nous écrirons sans crochets leurs dérivées particlles. Cette notation sera constamment employée dans la première partie, afin d'éviter les confusions.

(**) Poisson, *Mémoire sur la variation des constantes arbitraires dans les problèmes de mécanique*, Journal de l'École polytechnique, 15e cah. p. 281.

Il est facile de voir, d'après cela, que l'on a :

$$(\alpha, \beta) = -(\beta, \alpha),$$
$$(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta) = 0,$$
$$(\alpha, -\beta) = -(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha).$$

En outre, on vérifie facilement les formules :

$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dp_i} = \left(\alpha, \frac{d\beta}{dp_i}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dp_i}, \beta\right),$$
$$\frac{d(\alpha, \beta)}{dq_i} = \left(\alpha, \frac{d\beta}{dq_i}\right) + \left(\frac{d\alpha}{dq_i}, \beta\right).$$

23. Cela posé, nous pouvons nous assurer que, si les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, sont déterminées en fonction de $q_1, q_2, \ldots q_n$, par des équations telles que

$$p_1 - \psi_1(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0,$$
$$p_2 - \psi_2(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$p_n - \psi_n(q_1, q_2, \ldots q_n) = 0,$$

la condition d'intégrabilité (28) peut être mise sous la forme :

$$(p_i, p_k) = 0.$$

En effet, on trouve facilement, en vertu des équations (28) et (29),

$$(p_i, p_k) = \frac{dp_i}{dq_k} - \frac{dp_k}{dq_i} = 0 \ (^*).$$

24. Admettons maintenant, afin de donner aux équations de condition (28) une forme plus utile, que chacune des quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, renferme, outre les variables indépendantes q_1,

(*) Ces dérivées sont écrites sans crochets, d'après la notation adoptée (n° 21, note).

$q_2, \dots q_n$, toutes les quantités p qui la suivent. Ainsi, par exemple, supposons :

$$\begin{aligned}
&p_1 \text{ fonction de } p_2,\ p_3,\ \dots\ p_n, q_1, q_2, \dots q_n,\\
&p_2 \quad \text{» } \quad p_3,\ p_4,\ \dots\ p_n, q_1, q_2, \dots q_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_i \text{ fonction de } p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&p_n \text{ fonction de } \qquad\qquad\qquad\qquad q_1, q_2, \dots q_n,
\end{aligned}$$

et transformons les équations (28) en ayant égard à cette hypothèse.

Dans le cas actuel, pour avoir $\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right)$, il faut tenir compte de ce que p_i est fonction de $p_{i+1}, \dots p_n$, quantités qui renferment toutes q_k; pareillement, pour obtenir $\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right)$, on devra faire la même remarque. L'équation (28) devient :

$$\frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\left(\frac{dp_{i+1}}{dq_k}\right) + \dots + \frac{dp_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_k}\right) = \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_{k+1}}\left(\frac{dp_{k+1}}{dq_i}\right) + \dots + \dots + \frac{dp_k}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\right),$$

ou bien, à cause des relations (28),

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dp_i}{dq_k} + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\left(\frac{dp_k}{dq_{i+1}}\right) + \dots + \frac{dp_i}{dp_n}\left(\frac{dp_k}{dq_n}\right) =\\
&= \frac{dp_k}{dq_i} + \frac{dp_k}{dp_{k+1}}\left(\frac{dp_i}{dq_{k+1}}\right) + \dots + \frac{dp_k}{dp_n}\left(\frac{dp_i}{dq_n}\right).
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (30)$$

Mais, dans cette dernière expression, les quantités p sont encore des fonctions implicites, et nous aurons :

$$\left(\frac{dp_k}{dq_{i+1}}\right) = \frac{dp_k}{dq_{i+1}} + \frac{dp_k}{dp_{k+1}}\left(\frac{dp_{k+1}}{dq_{i+1}}\right) + \dots + \frac{dp_k}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_{i+1}}\right), \quad (*)$$

$$\left(\frac{dp_i}{dq_{k+1}}\right) = \frac{dp_i}{dq_{k+1}} + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\left(\frac{dp_{i+1}}{dq_{k+1}}\right) + \dots + \frac{dp_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_{k+1}}\right);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

(*) Dans ces formules, les premiers membres sont des dérivées totales : les premiers termes des seconds membres sont des dérivées partielles (n° 21).

en substituant dans l'équation (30), tenant compte des conditions (28), et supprimant les termes égaux dans les deux membres, on trouve :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dp_i}{dq_k}+\frac{dp_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_k}{dq_{i+1}}+\frac{dp_i}{dp_{i+2}}\frac{dp_k}{dq_{i+2}}+\ldots+\frac{dp_i}{dp_n}\frac{dp_k}{dq_n}\\&\quad-\frac{dp_k}{dp_{k+1}}\frac{dp_i}{dq_{k+i}}-\frac{dp_k}{dp_{k+2}}\frac{dp_i}{dq_{k+2}}-\ldots-\frac{dp_k}{dp_n}\frac{dp_i}{dq_n}=\frac{dp_k}{dq_i}.\end{aligned}\right\}\ (*)\quad (31)$$

Dans cette formule les dérivées des quantités p, par rapport aux variables $q_k, q_i, q_{i+1}, \ldots q_n$, sont prises en les considérant comme des fonctions explicites. La lettre i désigne un des nombres $1, 2, 3, \ldots n-1$; pour une valeur quelconque de i, k désigne un nombre plus grand que i, jusque $k=n$; k est donc un des nombres $i+1, i+2, \ldots n$.

Nous obtiendrons ainsi $\frac{n(n-1)}{2}$ équations exprimant les *conditions nécessaires* pour que l'expression (26) soit une différentielle exacte.

25. **Remarque.** — La formule (31) peut être écrite sous une forme symbolique analogue à celle du n° 23. En effet, soient :

$$p_i-\psi_i(p_{i+1},\ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n)=0,$$
$$p_k-\psi_k(p_{k+1},\ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n)=0,$$

les équations qui déterminent p_i et p_k, définies au numéro précédent.

Il est facile de voir que l'on a :

$$\frac{d(p_i-\psi_i)}{dq}=-\frac{d\psi_i}{dq}=-\frac{dp_i}{dq},$$
$$\frac{d(p_k-\psi_k)}{dq}=-\frac{d\psi_k}{dq}=-\frac{dp_k}{dq},$$

quel que soit l'indice de q.

(*) Toutes les dérivées sont ici des dérivées partielles.

On trouve de même :

$$\frac{d(p_i - \psi_i)}{dp_m} = -\frac{d\psi_i}{dp_m} = -\frac{dp_i}{dp_m},$$

pour $m > i + 1$,

et,

$$\frac{d(p_k - \psi_k)}{dp_m} = -\frac{d\psi_k}{dp_m} = -\frac{dp_k}{dp_m},$$

pour $m > k + 1$.

Enfin,

$$\frac{d(p_i - \psi_i)}{dp_i} = 1, \quad \frac{d(p_k - \psi_k)}{dp_k} = 1.$$

Par conséquent, la formule (31) peut être écrite, d'après la notation de *Poisson* (n° 22),

$$(p_i - \psi_i, p_k - \psi_k) = 0,$$

ce que l'on vérifie très-facilement.

En désignant, pour abréger, par p_i, p_k, les premiers membres des équations

$$p_i - \psi_i(p_{i+1}, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n) = 0,$$
$$p_k - \psi_k(p_{k+1}, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n) = 0,$$

on peut mettre l'équation précédente sous la forme plus simple :

$$(p_i, p_k) = 0.$$

26. Nous avons vu (n° 24) que les $\frac{n(n-1)}{2}$ conditions renfermées dans la formule (31) sont *nécessaires* pour que $p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n$ soit une différentielle exacte. Démontrons maintenant qu'elles sont *suffisantes*, c'est-à-dire que, *si elles ont lieu, cette expression sera une différentielle exacte.*

A cet effet, nous ferons subir à ces équations une transformation nouvelle.

Si l'on fait $k = n$ dans (31), il vient :

$$-\frac{dp_n}{dq_i} + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_n}{dq_{i+1}} + \cdots + \frac{dp_i}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_n} + \frac{dp_i}{dq_n} = 0,$$

tous les termes négatifs étant nuls, puisque, par hypothèse, p_n

ne renferme que $q_1, q_2, \ldots q_n$. De plus, en vertu de cette même hypothèse,

$$\frac{dp_n}{dq_i} = \left(\frac{dp_n}{dq_i}\right);$$

par suite, on peut écrire l'équation précédente sous la forme :

$$-\left(\frac{dp_n}{dq_i}\right) + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\left(\frac{dp_n}{dq_{i+1}}\right) + \cdots + \frac{dp_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_n}\right) + \frac{dp_i}{dq_n} = 0.$$

De même, si l'on fait $k = n - 1$ dans (31), on obtient :

$$-\frac{dp_{n-1}}{dq_i} + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_{n-1}}{dq_{i+1}} + \cdots + \frac{dp_i}{dp_n}\frac{dp_{n-1}}{dq_n} + \frac{dp_i}{dq_{n-1}} - \frac{dp_{n-1}}{dp_n}\frac{dp_i}{dq_n} = 0,$$

et, en ajoutant à cette équation la précédente multipliée par $\frac{dp_{n-1}}{dp_n}$, on a :

$$-\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_i}\right) + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_{i+1}}\right) + \cdots + \frac{dp_i}{dp_n}\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_n}\right) + \frac{dp_i}{dq_{n-1}} = 0.$$

Enfin, en général, on peut mettre l'équation (31) sous la forme suivante :

$$-\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) + \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\left(\frac{dp_k}{dq_{i+1}}\right) + \cdots + \frac{dp_i}{dp_n}\left(\frac{dp_k}{dq_n}\right) + \frac{dp_i}{dq_k} = 0. \quad (32)$$

Cela posé, il est facile de ramener cette dernière équation à la condition d'intégrabilité

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) = \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

En effet, supposons que cette proposition ait été démontrée pour les valeurs de i' et de k, plus grandes que i, et plus petites que n. Nous aurons, pour ces valeurs,

$$\left(\frac{dp_{i'}}{dq_k}\right) = \left(\frac{dp_k}{dq_{i'}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (33)$$

Comme $i + 1, i + 2, \ldots$ satisfont à cette condition, on peut,

en vertu de (33), remplacer l'équation (32) par la suivante :

$$-\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right)+\frac{dp_i}{dp_{i+1}}\left(\frac{dp_{i+1}}{dq_k}\right)+\cdots+\frac{dp_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_k}\right)+\frac{dp_i}{dq_k}=0,$$

ou bien

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right)-\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right)=0;$$

le théorème est donc démontré pour $i'=i$.

En outre, si $k=i$, on a une identité :

$$\left(\frac{dp_i}{dq_i}\right)-\left(\frac{dp_i}{dq_i}\right)=0;$$

donc, si le théorème est vrai pour $i'>i$ et $k>i$, il le sera encore pour $i'=i$, $k=i$. Par conséquent, s'il est vrai pour i' et k égaux à $i+1$, $i+2$, ... n, il le sera pour i', et k égaux à i, $i+1$, $i+2$, ... n.

Mais, si l'on suppose $i=n-1$, et par suite, $k=n$, il vient :

$$-\left(\frac{dp_n}{dq_{n-1}}\right)+\frac{dp_{n-1}}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_n}\right)+\frac{dp_{n-1}}{dq_n}=0,$$

ou

$$-\left(\frac{dp_n}{dq_{n-1}}\right)+\left(\frac{dp_{n-1}}{dq_n}\right)=0.$$

L'équation (33) étant vérifiée pour $i'=n-1$, $k=n>n-1$, c'est-à-dire pour $i'>n-2$, $k>n-2$, sera vraie pour $i'=n-2$, etc. Elle existe donc pour $i=n-1$, $n-2$, ... 3, 2, 1, k étant $>i$.

Il résulte de là qu'en général, les équations comprises dans la formule (31) expriment la condition d'intégrabilité de l'expression $p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_ndq_n$.

27. Cela posé, occupons-nous maintenant de la détermination des n quantités $p_1, p_2, \ldots p_n$, satisfaisant à la condition que $p_1dq_1+\cdots+p_ndq_n$, soit une différentielle exacte (n° 20).

La quantité p_1 pouvant être calculée au moyen de l'équation proposée

$$F(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n)=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

il nous reste à trouver $n-1$ autres équations qui permettent de calculer $p_2, p_3, \dots p_n$: c'est ce que l'équation

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_i}{dq_k}+\frac{dp_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_k}{dq_{i+1}}+\frac{dp_i}{dp_{i+2}}\frac{dp_k}{dq_{i+2}}+\dots+\frac{dp_i}{dp_n}\frac{dp_k}{dq_n}\\ -\frac{dp_k}{dp_{k+1}}\frac{dp_i}{dq_{k+1}}-\frac{dp_k}{dp_{k+2}}\frac{dp_i}{dq_{k+2}}-\dots-\frac{dp_k}{dp_n}\frac{dp_i}{dq_n}=\frac{dp_k}{dq_i},\end{aligned}\right\}\quad(31)$$

va nous donner successivement.

On effectuera le calcul de la manière suivante :

L'équation (25) donne p_1 en fonction de $p_2, p_3, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$.

Si l'on fait $i=1$, $k=2$, dans (31), il vient :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{dq_2}=\frac{dp_2}{dq_1}-\frac{dp_1}{dp_2}\frac{dp_2}{dq_2}-\frac{dp_1}{dp_3}\frac{dp_2}{dq_3}-\dots-\frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_2}{dq_n}\\ +\frac{dp_1}{dq_3}\frac{dp_2}{dp_3}+\frac{dp_1}{dq_4}\frac{dp_2}{dp_4}+\dots+\frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_2}{dp_n}.\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

Cette équation primordinale linéaire à $2n-1$ variables, que nous savons intégrer (n° 16), déterminera p_2 en fonction de p_3, $p_4, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$ (n° 24).

En faisant $i=1$, $i=2$, $k=3$, dans la même équation (31), on trouve les deux équations suivantes :-

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{dq_3}=\frac{dp_3}{dq_1}-\frac{dp_1}{dp_2}\frac{dp_3}{dq_2}-\frac{dp_1}{dp_3}\frac{dp_3}{dq_3}-\dots-\frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_3}{dq_n}\\ +\frac{dp_1}{dq_4}\frac{dp_3}{dp_4}+\frac{dp_1}{dq_5}\frac{dp_3}{dp_5}+\dots+\frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_3}{dp_n},\\ \frac{dp_2}{dq_3}=\frac{dp_3}{dq_2}-\frac{dp_2}{dp_3}\frac{dp_3}{dq_3}-\frac{dp_2}{dp_4}\frac{dp_3}{dq_4}-\dots-\frac{dp_2}{dp_n}\frac{dp_3}{dq_n}\\ +\frac{dp_2}{dq_4}\frac{dp_3}{dp_4}+\frac{dp_2}{dq_5}\frac{dp_3}{dp_5}+\dots+\frac{dp_2}{dq_n}\frac{dp_3}{dp_n}.\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

Elles serviront à déterminer p_3, qui sera une intégrale commune à ces deux équations. Mais avant d'effectuer ce calcul, on fera subir à la première une transformation : l'équation (34)

intégrée nous donne p_2, en fonction de $p_3, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$, et, si nous substituons cette valeur dans l'expression de p_1, en fonction de $p_2, \dots p_n, q_1, \dots q_n$, que nous avons déduite de (25), il en résultera que p_1 sera alors une fonction de $p_3, \dots p_n, q_1, \dots q_n$. Pour introduire cette condition dans les équations (35), nous ajouterons à la première la seconde multipliée par $\frac{dp_1}{dp_2}$; nous aurons ainsi une équation qui, jointe à la seconde des équations (35), donnera le système suivant, lequel remplacera (35) :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dq_3} &= \frac{dp_3}{dq_1} - \frac{dp_1}{dp_3}\frac{dp_3}{dq_3} - \frac{dp_1}{dp_4}\frac{dp_3}{dq_4} - \dots - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_3}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_1}{dq_4}\frac{dp_3}{dp_4} + \frac{dp_1}{dq_5}\frac{dp_3}{dp_5} + \dots + \frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_3}{dp_n}, \\
\frac{dp_2}{dq_3} &= \frac{dp_3}{dq_2} - \frac{dp_2}{dp_3}\frac{dp_3}{dq_3} - \frac{dp_2}{dp_4}\frac{dp_3}{dq_4} - \dots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{dp_3}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_2}{dq_4}\frac{dp_3}{dp_4} + \frac{dp_2}{dq_5}\frac{dp_3}{dp_5} + \dots + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{dp_3}{dp_n}.
\end{aligned}\right\} \quad (35^{bis})$$

En cherchant une solution commune de ces deux équations primordinales linéaires à $2n-3$ variables indépendantes, on aura une relation qui servira à déterminer p_3 en fonction de $p_4, p_5, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$, les quantités p_1, p_2, étant des fonctions de $p_4, p_5, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$.

La fonction p_3 étant connue, nous pourrons trouver p_4 en cherchant une intégrale commune aux trois équations suivantes, obtenues en faisant dans (31)

$$i = 1, 2, 3, \quad \text{et} \quad k = 4,$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dq_4} &= \frac{dp_4}{dq_1} - \frac{dp_1}{dp_2}\frac{dp_4}{dq_2} - \frac{dp_1}{dp_3}\frac{dp_4}{dq_3} - \dots - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_4}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_1}{dq_5}\frac{dp_4}{dp_5} + \frac{dp_1}{dq_6}\frac{dp_4}{dp_6} + \dots + \frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_4}{dp_n}, \\
\frac{dp_2}{dq_4} &= \frac{dp_4}{dq_2} - \frac{dp_2}{dp_3}\frac{dp_4}{dq_3} - \frac{dp_2}{dp_4}\frac{dp_4}{dq_4} - \dots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{dp_4}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_2}{dq_5}\frac{dp_4}{dp_5} + \frac{dp_2}{dq_6}\frac{dp_4}{dp_6} + \dots + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{dp_4}{dp_n},
\end{aligned}\right\} \quad (36)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_3}{dq_4}=\frac{dp_4}{dq_3}-\frac{dp_3}{dp_4}\frac{dp_4}{dq_4}-\frac{dp_3}{dp_5}\frac{dp_4}{dq_5}-\cdots-\frac{dp_3}{dp_n}\frac{dp_4}{dq_n}\\ +\frac{dp_3}{dq_5}\frac{dp_4}{dp_5}+\frac{dp_3}{dq_6}\frac{dp_4}{dp_6}+\cdots+\frac{dp_3}{dq_n}\frac{dp_4}{dp_n}.\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

Mais on peut simplifier les opérations en introduisant dans ces équations les valeurs trouvées précédemment. En effet, p_3 est déterminée (35^{bis}) en fonction de $p_4, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$; par conséquent, p_1, p_2, peuvent être considérées comme des fonctions de ces mêmes quantités. Pour introduire ces conditions dans le système (36), nous ajouterons à la seconde équation la troisième multipliée par $\frac{dp_2}{dp_3}$, ce qui nous donnera :

$$\begin{aligned}\frac{dp_2}{dq_4}=\frac{dp_4}{dq_2}-\frac{dp_2}{dp_4}\frac{dp_4}{dq_4}-\frac{dp_2}{dp_5}\frac{dp_4}{dq_5}-\cdots-\frac{dp_2}{dp_n}\frac{dp_4}{dq_n}\\ +\frac{dp_2}{dq_5}\frac{dp_4}{dp_5}+\frac{dp_2}{dq_6}\frac{dp_4}{dp_6}+\cdots+\frac{dp_2}{dq_n}\frac{dp_4}{dp_n}.\end{aligned}$$

En outre, si nous multiplions cette dernière par $\frac{dp_1}{dp_2}$, et la troisième (36) par $\frac{dp_1}{dp_3}$, et si nous ajoutons les résultats à la première (36), il viendra :

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dq_4}=\frac{dp_4}{dq_1}-\frac{dp_1}{dp_4}\frac{dp_4}{dq_4}-\frac{dp_1}{dp_5}\frac{dp_4}{dq_5}-\cdots-\frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_4}{dq_n}\\ +\frac{dp_1}{dq_5}\frac{dp_4}{dp_5}+\cdots+\frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_4}{dp_n}.\end{aligned}$$

Ces deux dernières équations, jointes à la troisième du groupe (36), donneront le système suivant de trois équations primordinales linéaires dont une solution commune déterminera p_4 en fonction de $p_5, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$, les quantités p_1, p_2, p_3, étant des fonctions de $p_4, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_1}{dq_4}=\frac{dp_4}{dq_1}-\frac{dp_1}{dp_4}\frac{dp_4}{dq_4}-\frac{dp_1}{dp_5}\frac{dp_4}{dq_5}-\cdots-\frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_4}{dq_n}\\ +\frac{dp_1}{dq_5}\frac{dp_4}{dp_5}+\cdots+\frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_4}{dp_n},\end{aligned}\right\}\quad(36^{bis})$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_2}{dq_4} &= \frac{dp_4}{dq_2} - \frac{dp_2}{dp_4}\frac{dp_4}{dq_4} - \frac{dp_2}{dp_5}\frac{dp_5}{dq_5} - \cdots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{dp_n}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_2}{dq_5}\frac{dp_5}{dp_5} + \cdots + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{dp_n}{dp_n}, \\
\frac{dp_3}{dq_4} &= \frac{dp_4}{dq_3} - \frac{dp_3}{dp_4}\frac{dp_4}{dq_4} - \frac{dp_3}{dp_5}\frac{dp_4}{dq_5} - \cdots - \frac{dp_3}{dp_n}\frac{dp_4}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_3}{dq_5}\frac{dp_4}{dp_5} + \cdots + \frac{dp_3}{dq_n}\frac{dp_4}{dp_n}.
\end{aligned}\right\} \quad (36^{bis})$$

On trouverait de la même manière que p_3 sera déterminée en fonction de $p_6, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, par une solution commune à quatre équations primordinales linéaires, etc.

En général, lorsque l'on aura déterminé les i fonctions p_1, $p_2, \ldots p_i$, au moyen de $p_{i+1}, p_{i+2}, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$, la fonction p_{i+1} sera une solution commune aux i équations primordinales linéaires suivantes :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dq_{i+1}} &= \frac{dp_{i+1}}{dq_1} - \frac{dp_1}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+1}} - \frac{dp_1}{dp_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+2}} - \cdots - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_{i+1}}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_1}{dq_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dp_{i+2}} + \cdots + \frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_{i+1}}{dp_n}, \\
\frac{dp_2}{dq_{i+1}} &= \frac{dp_{i+1}}{dq_2} - \frac{dp_2}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+1}} - \frac{dp_2}{dp_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+2}} - \cdots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{dp_{i+1}}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_2}{dq_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dp_{i+2}} + \cdots + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{dp_{i+1}}{dp_n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dp_i}{dq_{i+1}} &= \frac{dp_{i+1}}{dq_i} - \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+1}} - \frac{dp_i}{dp_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+2}} - \cdots - \frac{dp_i}{dp_n}\frac{dp_{i+1}}{dq_n} \\
&\quad + \frac{dp_i}{dq_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dp_{i+2}} + \cdots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{dp_{i+1}}{dp_n}.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

28. Le problème se résume donc dans le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant donnée une équation primordinale*

$$F(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \quad \ldots \quad (25)$$

ne renfermant pas la fonction inconnue,

on en déduira p_1 *en fonction de* $p_2, p_3, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$: *ensuite,* p_2 *sera déterminée par l'intégration d'une équation primordinale linéaire à* $2n - 1$ *variables;* p_3 *sera une solution commune à deux équations primordinales linéaires à* $2n - 3$ *variables; en général,* p_{i+1} *sera une solution commune à* i *équations primordinales linéaires à* $2n - 2i + 1$ *variables.*

IV.

TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS DU PROBLÈME.

29. Les équations qui servent à la détermination des quantités $p_1, p_2, \dots p_n$, peuvent être remplacées par d'autres en nombre égal, très-utiles dans certains cas : nous allons les faire connaître.

Nous avons vu (n° 20) que le problème sera résolu, si, à l'équation proposée (25), on ajoute $n - 1$ équations de la forme

$$F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \dots F_{n-1} = a_{n-1}, \text{ (*) } \dots \quad (27)$$

$F_1, F_2, \dots F_{n-1}$, étant des fonctions de $p_1, p_2, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$, et $a_1, a_2, \dots a_{n-1}$, des constantes arbitraires qui n'entrent pas dans les premiers membres de ces équations.

Ces équations (27) doivent être déterminées de telle manière que les valeurs de $p_1, p_2, \dots p_n$, que l'on en tire, rendent le second membre de l'expression (26) une différentielle exacte; par conséquent, telles que l'on ait :

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) = \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) \dots \dots \dots \quad (28)$$

Cherchons maintenant à quelles conditions ces fonctions F doivent être soumises.

30. Si nous prenons les dérivées de deux de ces fonctions :

$$F_i = a_i, \quad F_k = a_k,$$

(*) Nous remarquerons que rien n'empêche que l'équation proposée soit de la forme $F = a$, a étant une constante.

par rapport à chacune des variables $q_1, q_2, \dots q_n$, il vient :

$$\frac{dF_i}{dq_1} + \frac{dF_i}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dq_1}\right) + \frac{dF_i}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dq_1}\right) + \cdots + \frac{dF_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_1}\right) = 0,$$

$$\frac{dF_k}{dq_1} + \frac{dF_k}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dq_1}\right) + \frac{dF_k}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dq_1}\right) + \cdots + \frac{dF_k}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_1}\right) = 0,$$

$$\frac{dF_i}{dq_2} + \frac{dF_i}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dq_2}\right) + \frac{dF_i}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dq_2}\right) + \cdots + \frac{dF_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_2}\right) = 0,$$

$$\frac{dF_k}{dq_2} + \frac{dF_k}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dq_2}\right) + \frac{dF_k}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dq_2}\right) + \cdots + \frac{dF_k}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_2}\right) = 0,$$

. . . .

$$\frac{dF_i}{dq_n} + \frac{dF_i}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dq_n}\right) + \frac{dF_i}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dq_n}\right) + \cdots + \frac{dF_i}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_n}\right) = 0,$$

$$\frac{dF_k}{dq_n} + \frac{dF_k}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dq_n}\right) + \frac{dF_k}{dp_2}\left(\frac{dp_2}{dq_n}\right) + \cdots + \frac{dF_k}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_n}\right) = 0.$$

En éliminant $\left(\frac{dp_1}{dq_1}\right)$ entre les deux premières, $\left(\frac{dp_2}{dq_2}\right)$ entre les deux suivantes, etc., on obtient :

$$\frac{dF_i}{dq_1}\frac{dF_k}{dp_1} - \frac{dF_i}{dp_1}\frac{dF_k}{dq_1} + \left[\frac{dF_i}{dp_2}\frac{dF_k}{dp_1} - \frac{dF_i}{dp_1}\frac{dF_k}{dp_2}\right]\left(\frac{dp_2}{dq_1}\right) + \cdots + \left[\frac{dF_i}{dp_n}\frac{dF_k}{dp_1} - \frac{dF_i}{dp_1}\frac{dF_k}{dp_n}\right]\left(\frac{dp_n}{dq_1}\right) = 0,$$

$$\frac{dF_i}{dq_2}\frac{dF_k}{dp_2} - \frac{dF_i}{dp_2}\frac{dF_k}{dq_2} + \left[\frac{dF_i}{dp_1}\frac{dF_k}{dp_2} - \frac{dF_i}{dp_2}\frac{dF_k}{dp_1}\right]\left(\frac{dp_1}{dq_2}\right) + \cdots + \left[\frac{dF_i}{dp_n}\frac{dF_k}{dp_2} - \frac{dF_i}{dp_2}\frac{dF_k}{dp_n}\right]\left(\frac{dp_n}{dq_2}\right) = 0,$$

et ainsi de suite.

Si maintenant, nous ajoutons membre à membre, en tenant compte des conditions d'intégrabilité (28), nous aurons, pour la relation qui doit exister entre deux fonctions F quelconques :

$$\frac{dF_i}{dq_1}\frac{dF_k}{dp_1} - \frac{dF_i}{dp_1}\frac{dF_k}{dq_1} + \frac{dF_i}{dq_2}\frac{dF_k}{dp_2} - \frac{dF_i}{dp_2}\frac{dF_k}{dq_2} + \cdots + \frac{dF_i}{dq_n}\frac{dF_k}{dp_n} - \frac{dF_i}{dp_n}\frac{dF_k}{dq_n} = 0,$$

les autres termes se détruisant deux à deux.

Cette équation qui peut s'écrire, d'après la notation de Poisson, sous l'une des deux formes symboliques suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{dF_i}{dq_{k'}}\frac{dF_k}{dp_{k'}}-\frac{dF_i}{dp_{k'}}\frac{dF_k}{dq_{k'}}\right)=0,\\ \text{ou}\qquad &(F_i,F_k)=0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

doit avoir lieu pour toutes les valeurs de i, k depuis 0 jusque $n-1$ (*).

31. **Remarque.** — Le nombre de ces équations est évidemment le même que celui des conditions d'intégrabilité

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right)=\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$.

32. Nous venons de voir que les équations (38) sont *nécessaires :* il nous reste à prouver qu'elles sont *suffisantes*, c'est-à-dire que, *si elles sont vérifiées, l'expression*

$$p_1dq_1+p_2dq_2+\cdots+p_ndq_n, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

sera une différentielle exacte, et, par conséquent, la condition (28) *sera satisfaite.*

Considérons deux des équations F, par exemple :

$$F_\alpha=a_\alpha, \quad F_\beta=a_\beta,$$

satisfaisant à la condition (38), a_α, a_β étant deux constantes arbitraires.

En différentiant la première par rapport à q_i, on a :

$$\frac{dF_\alpha}{dq_i}+\frac{dF_\alpha}{dp_1}\left(\frac{dp_1}{dq_i}\right)+\cdots+\frac{dF_\alpha}{dp_n}\left(\frac{dp_n}{dq_i}\right)=0,$$

ou, en abrégé,

$$\frac{dF_\alpha}{dq_i}+\sum_{k=1}^{k=n}\frac{dF_\alpha}{dp_k}\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right)=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

(*) En supposant, bien entendu, $F_0=F$.

Nous aurons de même, en différentiant la seconde par rapport à q_k,

$$\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dq_k} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i}\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) = 0. \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Multiplions l'équation (39) par $\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i}$, et prenons la somme depuis $i = 1$, jusque $i = n$: de même, multiplions (40) par $\frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_k}$, et prenons la somme depuis $k = 1$, jusque $k = n$, il viendra :

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dq_i}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_k}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i}\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) = 0,$$
$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_k}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dq_k} + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_k}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i}\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) = 0;$$

en retranchant membre à membre, on a :

$$\sum_{i=1}^{i=n}\left[\frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dq_i}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i} - \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_i}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dq_i}\right] + \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_k}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i}\left[\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) - \left(\frac{dp_i}{dq_k}\right)\right] = 0.$$

Or, la première somme n'est autre que la quantité représentée par $(\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{F}_\beta)$, laquelle est nulle, par hypothèse. Il nous reste donc la somme double

$$\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_k}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i}\left[\left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) - \left(\frac{dp_i}{dq_k}\right)\right] = 0.$$

Si on la développe, en donnant à i, k, toutes les valeurs 1, 2, 3, ... n, on verra que les termes dans lesquels $i = k$ sont nuls : les termes restants se déduisent les uns des autres en permutant les indices i, k. Cette somme pourra donc être écrite sous la forme suivante :

$$\sum_{i,k}\left[\frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_k}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_i} - \frac{d\mathrm{F}_\alpha}{dp_i}\frac{d\mathrm{F}_\beta}{dp_k}\right]\left\{\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) - \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right)\right\} = 0,$$

renfermant $\frac{n(n-1)}{2}$ termes, et dans laquelle on donnera à k les valeurs 1, 2, 3, ... $n-1$, et à i toutes les valeurs supérieures à k, c'est-à-dire que, pour chaque valeur de k, on donnera à i les valeurs $k+1$, $k+2$, ... n.

Nous aurons $\frac{n(n-1)}{2}$ équations semblables à la précédente, en donnant à α, β, toutes les valeurs $0, 1, 2, \ldots n-1$, c'est-à-dire en prenant pour F_α et F_β deux quelconques des fonctions $F, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$. Or, ces équations linéaires par rapport aux $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités $\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) - \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right)$, sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$; comme les seconds membres sont nuls, il en résulte :

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) - \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right) = 0,$$

pour toutes valeurs de i et k, égales à $1, 2, 3, \ldots n-1, n$, si le déterminant des coefficients n'est pas nul. Mais, ce déterminant se réduit au déterminant

$$\sum \pm \frac{dF}{dp_1}\frac{dF_1}{dp_2}\cdots\frac{dF_{n-1}}{dp_n},$$

obtenu en permutant les indices $1, 2, 3, \ldots n-1$, et cette quantité ne peut être nulle que s'il existe une relation entre les fonctions $F, F_1, F_2, \ldots F_{n-1}$, ce qui est contraire à l'hypothèse que ces fonctions sont indépendantes les unes des autres.

Il résulte de là que *la condition* $(F_i, F_k) = 0$, *pour les valeurs* $0, 1, 2, 3, \ldots n-1$, *de* i, k, *se réduit à la condition*

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) = \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right),$$

pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$ *de* i, k.

33. Le problème général de la recherche des fonctions F peut donc se résoudre de la manière suivante :

Théorème. — *Connaissant la fonction* $F = 0$, *qui est l'équation proposée, on déterminera la fonction* $F_1 = a_1$ *au moyen de l'équation primordinale linéaire*

$$(F, F_1) = 0.$$

Cela fait, la fonction $F_2 = a_2$ *sera une intégrale commune aux deux équations primordinales linéaires*

$$(F, F_2) = 0, \quad (F_1, F_2) = 0.$$

On déterminera ensuite la fonction $F_3 = a_3$, *intégrale commune aux trois équations simultanées*

$$(F, F_3) = 0, \quad (F_1, F_3) = 0, \quad (F_2, F_3) = 0,$$

et ainsi de suite.

Enfin, la fonction $F_{n-1} = a_{n-1}$ *sera une intégrale commune aux* n *équations linéaires*

$$(F, F_{n-1}) = 0, \quad (F_1, F_{n-1}) = 0, \ldots (F_{n-2}, F_{n-1}) = 0.$$

Il nous reste donc à chercher une méthode d'intégration de deux ou plusieurs équations primordinales linéaires. Mais, avant de procéder à cette recherche, nous devons démontrer un théorème d'une très-grande importance, et dont nous ferons un fréquent usage dans les chapitres suivants.

V.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE JACOBI.

34. Le théorème de *Jacobi* (*) peut s'énoncer de la manière suivante :

THÉORÈME. — *Soient* $A(f) = 0$, $B(f) = 0$, *deux équations primordinales linéaires simultanées. Si* f *est une fonction qui vérifie la première, sans satisfaire à la seconde, de telle sorte que l'on ait :*

$$A(f) = 0, \quad B(f) \text{ différent de zéro},$$

je dis que l'on aura identiquement

$$A[B(f)] = 0,$$

(*) JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 257-259. — Ibid., *Nova methodus integrandi*, etc., pp. 35 et suiv. — IMSCHENETSKY, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, traduction par M. HOUEL, p. 141. Paris; 1869.

c'est-à-dire que le résultat B (f) *de la substitution de* f *dans la seconde équation fournit une nouvelle solution de la première* A (f) = 0.

La démonstration de ce théorème repose sur une formule que nous allons d'abord faire connaître.

Soient les deux équations suivantes :

$$A(f) = A_1 \frac{df}{dx_1} + A_2 \frac{df}{dx_2} + \cdots + A_n \frac{df}{dx_n} = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \frac{df}{dx_i}, \quad . \quad . \quad (41)$$

$$B(f) = B_1 \frac{df}{dx_1} + B_2 \frac{df}{dx_2} + \cdots + B_n \frac{df}{dx_n} = \sum_{k=1}^{k=n} B_k \frac{df}{dx_k}, \quad . \quad . \quad (42)$$

A_i et B_k étant des fonctions des variables $x_1, x_2, \ldots x_n$. On peut considérer, avec *Jacobi*, A et B comme étant des signes d'opérations bien déterminées. Par conséquent, si l'on soumet A (f), qui est une fonction de $x_1, x_2, \ldots x_n$, à l'opération B, on aura, d'après la notation adoptée,

$$B\big(A(f)\big);$$

de même, en soumettant B (f) à l'opération A, on obtient :

$$A\big(B(f)\big).$$

Cela posé, proposons-nous de trouver la différence

$$A\big(B(f)\big) - B\big(A(f)\big) = C(f). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

Il est facile de voir que l'on a :

$$A\big(B(f)\big) = \sum_{i=1}^{i=n} A_i \frac{d}{dx_i} \left\{ \sum_{k=1}^{k=n} B_k \frac{df}{dx_k} \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_i B_k \frac{d^2 f}{dx_i dx_k} + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} A_i \frac{dB_k}{dx_i} \frac{df}{dx_k},$$

$$B\big(A(f)\big) = \sum_{k=1}^{k=n} B_k \frac{d}{dx_k} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} A_i \frac{df}{dx_i} \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} B_k A_i \frac{d^2 f}{dx_i dx_k} + \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{i=1}^{i=n} B_k \frac{dA_i}{dx_k} \frac{df}{dx_i};$$

d'où

$$C(f) = A\left(B(f)\right) - B\left(A(f)\right) = \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} A_i \frac{dB_k}{dx_i}\frac{df}{dx_k} - \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{i=1}^{i=n} B_k \frac{dA_i}{dx_k}\frac{df}{dx_i},$$

ou bien

$$C(f) = \sum_{i=1}^{i=n}\left[\sum_{k=1}^{k=n}\left(A_k\frac{dB_i}{dx_k} - B_k\frac{dA_i}{dx_k}\right)\right]\frac{df}{dx_i}. \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

En posant

$$C_i = \sum_{k=1}^{k=n}\left(A_k\frac{dB_i}{dx_k} - B_k\frac{dA_i}{dx_k}\right)$$
$$= A_1\frac{dB_i}{dx_1} + A_2\frac{dB_i}{dx_2} + \cdots + A_n\frac{dB_i}{dx_n}$$
$$- B_1\frac{dA_i}{dx_1} - B_2\frac{dA_i}{dx_2} - \cdots - B_n\frac{dA_i}{dx_n} = A(B_i) - B(A_i),$$

on trouve :

$$C(f) = \sum_{i=1}^{i=n} C_i\frac{df}{dx_i} = C_1\frac{df}{dx_1} + C_2\frac{df}{dx_2} + \cdots + C_n\frac{df}{dx_n}. \quad (44^{bis})$$

35. **Remarque.** — On conclut de cette formule que les conditions nécessaires et suffisantes, auxquelles doivent satisfaire les coefficients A et B pour que l'on ait

$$C(f) = 0,$$

sont les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= A(B_1) - B(A_1) = 0,\\ C_2 &= A(B_2) - B(A_2) = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\\ C_n &= A(B_n) - B(A_n) = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées, si l'on a identiquement, pour une valeur quelconque de i,

$$C_i = A(B_i) - B(A_i) = 0,$$

il en résulte

$$A\left(B(f)\right) = B\left(A(f)\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

36. Voyons maintenant l'usage de ce dernier résultat dans

la recherche de l'intégrale des deux équations primordinales linéaires

$$A(f) = 0, \quad B(f) = 0,$$

satisfaisant aux n conditions

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \ldots C_n = 0.$$

Si f_1 est une solution de la première de ces équations, on a :

$$A(f_1) = 0;$$

d'où

$$B\big(A(f_1)\big) = B(o) = 0,$$

et, par suite, à cause de (46),

$$A\big(B(f_1)\big) = 0.$$

Par conséquent, $B(f_1) = f_2$ sera aussi une solution de la première équation.

Si nous substituons ensuite f_2 dans la seconde équation (42), nous aurons pour résultat $B(f_2)$, qui sera une nouvelle intégrale de la première (41).

En effet, puisque

$$A(f_2) = A\big(B(f_1)\big) = 0,$$

on a

$$B\big(A(f_2)\big) = B(o) = 0;$$

par suite,

$$A\big(B(f_2)\big) = 0,$$

et ainsi de suite.

37. **Remarque.** — Nous pouvons introduire ici une convention, afin de simplifier la notation, et écrire

$$B(f_2) = B\big(B(f_1)\big) = B^2(f_1);$$

de même, nous écrirons

$$B\big(B^2(f_1)\big) = B^3(f_1), \text{ etc.}$$

Il est facile de voir que, si f_1 est une intégrale de la première

équation (41), on aura de nouvelles intégrales de cette même équation, en formant les expressions $B(f_1), B^2(f_1), \dots B^{2n-1}(f_1)$, etc.

38. Le théorème précédent s'applique sans aucune difficulté aux équations linéaires qui se rapportent au problème de l'intégration d'une équation primordinale donnée $F = 0$.

Soient, au lieu des équations (41) et (42), les deux équations simultanées à $2n$ variables indépendantes que nous rencontrons dans ce problème :

$$\left.\begin{aligned} A(f) = {} & \frac{d\varphi}{dq_1}\frac{df}{dp_1} + \frac{d\varphi}{dq_2}\frac{df}{dp_2} + \dots + \frac{d\varphi}{dq_n}\frac{df}{dp_n} \\ & - \frac{d\varphi}{dp_1}\frac{df}{dq_1} - \frac{d\varphi}{dp_2}\frac{df}{dq_2} - \dots - \frac{d\varphi}{dp_n}\frac{df}{dq_n}, \\ B(f) = {} & \frac{d\psi}{dq_1}\frac{df}{dp_1} + \frac{d\psi}{dq_2}\frac{df}{dp_2} + \dots + \frac{d\psi}{dq_n}\frac{df}{dp_n} \\ & - \frac{d\psi}{dp_1}\frac{df}{dq_1} - \frac{d\psi}{dp_2}\frac{df}{dq_2} - \dots - \frac{d\psi}{dp_n}\frac{df}{dq_n}, \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

ou, d'après la notation de *Poisson*,

$$\left.\begin{aligned} A(f) &= (\varphi, f), \\ B(f) &= (\psi, f). \end{aligned}\right\} \quad (47^{bis})$$

Nous remarquerons qu'ici les $2n$ variables sont :

$$x_1 = p_1, \quad x_2 = p_2, \dots x_n = p_n, \quad x_{n+1} = q_1, \dots x_{2n} = q_n,$$

et les coefficients A_i et B_i :

$$A_1 = \frac{d\varphi}{dq_1}, \quad A_2 = \frac{d\varphi}{dq_2}, \dots A_n = \frac{d\varphi}{dq_n}, \quad A_{n+1} = -\frac{d\varphi}{dp_1}, \dots A_{2n} = -\frac{d\varphi}{dp_n},$$

$$B_1 = \frac{d\psi}{dq_1}, \quad B_2 = \frac{d\psi}{dq_2}, \dots B_n = \frac{d\psi}{dq_n}, \quad B_{n+1} = -\frac{d\psi}{dp_1}, \dots B_{2n} = -\frac{d\psi}{dp_n}.$$

Afin de calculer $C(f)$, divisons les valeurs de C_i, pour $i = 1, 2, \dots 2n$, en deux groupes, C_i et C_{n+i}, dans lesquels on donnera à i les valeurs $1, 2, \dots n$, de sorte que l'on a :

$$C(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(C_i \frac{df}{dp_i} + C_{n+i} \frac{df}{dq_i} \right).$$

D'après ce que nous avons vu (n° 22),

$$C_i = A(B_i) - B(A_i) = \left(\varphi, \frac{d\psi}{dq_i}\right) - \left(\psi, \frac{d\varphi}{dq_i}\right);$$

$$= \left(\varphi, \frac{d\psi}{dq_i}\right) + \left(\frac{d\varphi}{dq_i}, \psi\right) = \frac{d(\varphi, \psi)}{dq_i}; \quad . \quad . \quad (48)$$

$$C_{n+i} = A(B_{n+i}) - B(A_{n+i}) = \left(\varphi, -\frac{d\psi}{dp_i}\right) - \left(\psi, -\frac{d\varphi}{dp_i}\right)$$

$$= -\left(\varphi, \frac{d\psi}{dp_i}\right) - \left(\frac{d\varphi}{dp_i}, \psi\right) = -\frac{d(\varphi, \psi)}{dp_i}. \quad . \quad . \quad (49)$$

Par suite,

$$C(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \left[\frac{d(\varphi, \psi)}{dq_i}\frac{df}{dp_i} - \frac{d(\varphi, \psi)}{dp_i}\frac{df}{dq_i}\right] = \big((\varphi, \psi), f\big). \quad . \quad (50)$$

Les deux relations (48) et (49) nous apprennent que $C(f)$ sera identiquement nulle, lorsque nous aurons :

$$C_i = \frac{d(\varphi, \psi)}{dq_i} = 0,$$

$$C_{n+i} = -\frac{d(\varphi, \psi)}{dp_i} = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'on aura identiquement :

$$(\varphi, \psi) = 0.$$

Or, cette relation existera lorsque ψ sera une solution de l'équation $A(f) = (\varphi, f) = 0$; mais, $f = \psi$ est aussi une intégrale de l'équation

$$B(f) = (\psi, f) = 0.$$

Par conséquent, la condition $C(f) = 0$ sera vérifiée, si les coefficients des équations proposées sont tels que l'on ait :

$$(\varphi, \psi) = 0,$$

c'est-à-dire si elles ont une intégrale commune.

Le théorème fondamental (n° 34) est donc applicable aux équations simultanées dont nous avons à nous occuper dans le

problème actuel, puisque, par définition, ces différents systèmes ont une solution commune.

39. **Remarque.** — Les équations (43) et (50) nous donnent une formule très-remarquable, que M. *Donkin* a démontrée directement (*), et de laquelle il déduit le théorème fondamental de *Jacobi*.

Nous avons trouvé :

$$C(f) = \big((\varphi, \psi), f\big);$$

mais, on a aussi :

$$A\big(B(f)\big) = \big(\varphi, (\psi, f)\big),$$
$$B\big(A(f)\big) = \big(\psi, (\varphi, f)\big).$$

Par suite, la formule (43) devient :

$$\big(\varphi, (\psi, f)\big) - \big(\psi, (\varphi, f)\big) = \big((\varphi, \psi), f\big).$$

Or, d'après les formules connues (n° 22),

$$\big(\varphi, (\psi, f)\big) = -\big((\psi, f), \varphi\big),$$
$$\big(\psi, (\varphi, f)\big) = \big(\psi, -(f, \varphi)\big) = -\big(\psi, (f, \varphi)\big) = \big((f, \varphi), \psi\big);$$

par conséquent,

$$\big((f, \varphi), \psi\big) + \big((\varphi, \psi), f\big) + \big((\psi, f), \varphi\big) = 0. \quad . \quad . \quad (51)$$

(*) Donkin, *On a class of differential equations*, Philosophical transactions; 1854, p. 92.

M. Imschenetsky donne une démonstration de cette formule, fondée sur les propriétés des déterminants, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, p. 53.

VI.

PREMIÈRE MÉTHODE D'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION PRIMORDINALE. — DÉTERMINATION DE L'INTÉGRALE COMPLÈTE. — APPLICATIONS.

40. D'après ce que nous avons vu (n° 33), le problème se résout de la manière suivante :

Étant donnée l'équation primordinale

$$F(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = a, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

a étant une constante qui peut être nulle, on commencera par déterminer une équation

$$F_1(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = a_1,$$

dans laquelle a_1 est une constante, et F_1 une fonction inconnue qui satisfasse à l'équation linéaire

$$(F, F_1) = 0,$$

ou

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dF}{dq_1}\frac{dF_1}{dp_1} - \frac{dF}{dp_1}\frac{dF_1}{dq_1} + \frac{dF}{dq_2}\frac{dF_1}{dp_2} - \frac{dF}{dp_2}\frac{dF_1}{dq_2} + \dots + \frac{dF}{dq_n}\frac{dF_1}{dp_n} - \frac{dF}{dp_n}\frac{dF_1}{dq_n} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Or, il faudra, pour cela, intégrer le système d'équations simultanées ordinaires :

$$\frac{dq_1}{-\frac{dF}{dp_1}} = \frac{dq_2}{-\frac{dF}{dp_2}} = \dots = \frac{dq_n}{-\frac{dF}{dp_n}} = \frac{dp_1}{\frac{dF}{dq_1}} = \dots = \frac{dp_n}{\frac{dF}{dq_n}}. \quad . \quad (54)$$

Si $f_1(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = \text{const}$, est une intégrale de ce système, on pourra prendre pour la fonction F_1 cherchée, cette fonction f_1, et poser

$$F_1 = f_1 = a_1. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

41. Cela fait, nous devons rechercher la fonction

$$F_2(q_1, q_2, \dots q_n, p_1, p_2, \dots p_n) = a_2,$$

telle que l'on ait :

$$(F, F_2) = 0, \quad (F_1, F_2) = (f_1, F_2) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

Or, d'après le théorème de *Jacobi* (n° 34), si l'on connaît une intégrale de l'une de ces équations, l'intégrale commune peut être obtenue facilement. Si nous observons en outre que la première de ces deux équations linéaires (56) est identique à (53), il nous faudra trouver une intégrale du système d'équations simultanées (54), différente de $f_1 = a_1$.

Soit

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = \text{const},$$

une telle intégrale : si nous substituons la fonction φ, à la place de F_2, dans le premier membre de la seconde équation (56), il peut arriver deux cas :

1^er^ cas. — Si $(f_1, \varphi) = 0$, la fonction φ sera l'intégrale commune, et l'on devra prendre

$$F_2 = \varphi = a_2.$$

2^me^ cas. — Si le résultat de la substitution est différent de zéro, on aura $(f_1, \varphi) = \varphi_1$. On répétera successivement la même opération, ce qui nous donne la série :

$$(f_1, \varphi_1) = \varphi_2, \quad (f_1, \varphi_2) = \varphi_3, \ldots (f_1, \varphi_{i-1}) = \varphi_i, \text{ etc.},$$

laquelle peut se continuer indéfiniment. Toutes ces fonctions seront (n° 38) des intégrales de la première équation (56), puisque $(F, f_1) = 0$, en vertu de l'équation (53).

42. Nous pouvons faire sur la fonction φ_i trois hypothèses, que nous allons examiner successivement :

1° Soit $\varphi_i = 0$: alors évidemment $\varphi_{i-1} = a_2$, sera la fonction cherchée ; ce sera l'intégrale commune aux deux équations (56), puisque φ_{i-1} est une intégrale de la première de ces équations, et que

$$(\varphi_{i-1}, f_1) = 0.$$

2° La fonction φ_i est différente de zéro, et n'est pas constante. Les équations simultanées ne pouvant avoir que $2n - 1$ inté-

grales distinctes, il en résulte que l'on ne pourra trouver constamment des fonctions φ différentes les unes des autres. On arrivera nécessairement à une fonction φ_i, qui sera exprimée au moyen des intégrales précédemment trouvées, et le nombre i sera moindre que $2n$. Si l'on continuait alors les opérations, la fonction φ_{i+1} serait aussi une fonction de $F, f_1, \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{i-1}$: en effet, soit

$$\varphi_i = \psi\,(F, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}),$$

et formons la fonction φ_{i+1}. Nous aurons :

$$\varphi_{i+1} = (\varphi_i, f_1) = (\psi, f_1) = \frac{d\psi}{dq_1}\frac{df_1}{dp_1} - \frac{d\psi}{dp_1}\frac{df_1}{dq_1} + \cdots + \frac{d\psi}{dq_n}\frac{df_1}{dp_n} - \frac{d\psi}{dp_n}\frac{df_1}{dq_n},$$

ou bien :

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1} = {} & \frac{df_1}{dp_1}\left[\frac{d\psi}{dF}\frac{dF}{dq_1} + \frac{d\psi}{df_1}\frac{df_1}{dq_1} + \cdots + \frac{d\psi}{d\varphi_{i-1}}\frac{d\varphi_{i-1}}{dq_1}\right] \\ & - \frac{df_1}{dq_1}\left[\frac{d\psi}{dF}\frac{dF}{dp_1} + \frac{d\psi}{df_1}\frac{df_1}{dp_1} + \cdots + \frac{d\psi}{d\varphi_{i-1}}\frac{d\varphi_{i-1}}{dp_1}\right] \\ & + \text{etc.} \\ = {} & \frac{d\psi}{dF}(F, f_1) + \frac{d\psi}{df_1}(f_1, f_1) + \frac{d\psi}{d\varphi}(\varphi, f_1) + \cdots + \frac{d\psi}{d\varphi_{i-1}}(\varphi_{i-1}, f_1).\end{aligned}$$

Mais, puisque $(F, f_1) = 0$, $(f_1, f_1) = 0$, on a :

$$\varphi_{i+1} = \varphi_1\frac{d\psi}{d\varphi} + \varphi_2\frac{d\psi}{d\varphi_1} + \cdots + \psi\frac{d\psi}{d\varphi_{i-1}}, \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

et l'on en conclut que φ_{i+1} est une fonction de $F, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$, seulement.

Cela posé, nous nous proposerons de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction des intégrales $F, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$, *qui, mise à la place de* F_2, *satisfasse aux deux équations* (56). Soit

$$F_2 = f_2(F, f_1, \varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}).$$

cette fonction inconnue. Nous aurons, de la même manière que pour la formule (57),

$$\left.\begin{aligned}(\mathrm{F}, f_2) = (\mathrm{F}, \mathrm{F})\frac{df_2}{d\mathrm{F}} + (\mathrm{F}, f_1)\frac{df_2}{df_1} + (\mathrm{F}, \varphi)\frac{df_2}{d\varphi} + \cdots \\ + (\mathrm{F}, \varphi_{i-1})\frac{df_2}{d\varphi_{i-1}} = 0, \\ (f_1, f_2) = (f_1, \mathrm{F})\frac{df_2}{d\mathrm{F}} + (f_1, f_1)\frac{df_2}{df_1} + (f_1, \varphi)\frac{df_2}{d\varphi} + \cdots \\ + (f_1, \varphi_{i-1})\frac{df_2}{d\varphi_{i-1}} = 0.\end{aligned}\right\} \quad (58)$$

Or, à cause des relations

$$(\mathrm{F}, \mathrm{F}) = 0, \quad (\mathrm{F}, f_1) = 0, \quad (\mathrm{F}, \varphi) = 0, \ldots (\mathrm{F}, \varphi_{i-1}) = 0,$$
$$(f_1, \mathrm{F}) = 0, \quad (f_1, f_1) = 0, \quad (f_1, \varphi) = \varphi_1, \ldots (f_1, \varphi_{i-1}) = \varphi_i = \psi,$$

la première de ces équations (58) est satisfaite identiquement; la seconde donne l'équation primordinale linéaire suivante :

$$\varphi_1\frac{df_2}{d\varphi} + \varphi_2\frac{df_2}{d\varphi_1} + \cdots + \varphi_{i-1}\frac{df_2}{d\varphi_{i-2}} + \psi\frac{df_2}{d\varphi_{i-1}} = 0, \quad . \quad (59)$$

dans laquelle les variables indépendantes sont $\varphi, \varphi_1, \ldots \varphi_{i-1}$; les quantités F, f_1, seront considérées comme constantes, puisque l'équation (59) ne renferme pas de dérivées partielles relatives à ces variables.

Il suffira donc de déterminer une intégrale particulière de cette équation, ou une intégrale du système ordinaire :

$$\frac{d\varphi}{\varphi_1} = \frac{d\varphi_1}{\varphi_2} = \cdots = \frac{d\varphi_{i-1}}{\psi}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

Nous remarquerons que, si l'on égale à dt la valeur commune de ces rapports, on pourra remplacer le système (60) par une équation unique de l'ordre i :

$$\frac{d^i\varphi}{dt^i} = \psi\left(\mathrm{F}, f_1, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots \frac{d^{i-1}\varphi}{dt^{i-1}}\right) . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

Soit

$$\Phi\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots \frac{d^{i-1}\varphi}{dt^{i-1}}\right) = \text{const},$$

une des intégrales premières de l'équation (61) : en remplaçant les dérivées $\frac{d\varphi}{dt}, \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \cdots$ par leurs valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, et posant

$$f_2 = \Phi(\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{i-1}) = a_2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

on aura la solution commune aux équations (56).

3° La fonction φ_i est constante, $\varphi_i = c$. On a alors l'équation

$$\frac{d\varphi_{i-2}}{\varphi_{i-1}} = \frac{d\varphi_{i-1}}{c};$$

on tire de là :

$$\varphi_{i-1}^2 - 2c\varphi_{i-2} = \text{const.}$$

Il vient alors :

$$f_2 = \varphi_{i-1}^2 - 2c\varphi_{i-2},$$

pourvu que l'on ait $i > 1$.

Si $i = 1$, alors

$$\varphi_1 = c,$$

et l'on a :

$$c\frac{df_2}{d\varphi} = 0;$$

par suite, aucune fonction de φ ne peut être une intégrale des équations (56).

43. Dans ce dernier cas, la solution doit être modifiée de l'une des manières suivantes :

1° On peut commencer par déterminer une intégrale de la seconde des équations (56), c'est-à-dire trouver une solution de l'équation

$$(f_1, F_2) = 0,$$

et puis continuer les opérations comme précédemment.

2° On peut aussi rechercher une nouvelle solution de la première équation (56) :

$$(F, F_2) = 0,$$

différente de celles que nous avons déjà trouvées, c'est-à-dire différente de

$$F = a, \quad f_1 = a_1, \text{ et } \varphi = \text{const.}$$

Si

$$\psi(q_1, q_2, \cdots q_n, p_1, p_2, \cdots p_n) = \text{const},$$

est cette intégrale, on continuera avec la fonction ψ les opérations que nous avons faites avec la fonction φ.

44. Il pourrait aussi arriver que cette fonction ψ nous donnât les mêmes particularités que la fonction φ, et que l'on eût :

$$(f_1, \varphi) = c, \quad (f_1, \psi) = c',$$

c, c' étant des constantes, ou des fonctions, c de φ, et c' de ψ. Dans ce cas, le problème n'est pas impossible; au contraire, il peut être immédiatement résolu. En effet, si nous supposons

$$F_2 = f_2(\varphi, \psi),$$

nous aurons, en substituant dans les équations (56),

$$(F, f_2) = (F, \varphi)\frac{df_2}{d\varphi} + (F, \psi)\frac{df_2}{d\psi} = 0,$$

$$(f_1, f_2) = (f_1, \varphi)\frac{df_2}{d\varphi} + (f_1, \psi)\frac{df_2}{d\psi} = 0.$$

Or, d'après les conditions précédentes, la première de ces équations est identiquement nulle; la seconde nous donne, pour déterminer f_2, l'équation primordinale linéaire :

$$c\frac{df_2}{d\varphi} + c'\frac{df_2}{d\psi} = 0.$$

De cette dernière on tire :

$$f_2 = \Pi\left(\int\frac{d\varphi}{c} - \int\frac{d\psi}{c'}\right),$$

Π désignant une fonction arbitraire : les intégrales du second membre se trouvent facilement, puisque c, c' sont des constantes, ou des fonctions respectivement de φ, et de ψ.

En posant, dans l'un ou l'autre cas,

$$F_2 = f_2 = a_2,$$

nous aurons la fonction cherchée.

45. Quant à la fonction F_3, elle sera une intégrale commune aux trois équations linéaires suivantes :

$$(F, F_3) = 0, \quad (f_1, F_3) = 0, \quad (f_2, F_3) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Nous commencerons par déterminer, comme dans les numéros précédents, une intégrale commune aux deux premières équations,

$$F_3 = \xi(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = \text{const},$$

différente de la fonction

$$\Phi = a_2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Ensuite, on continue la solution de la manière suivante :

On substituera ξ à F_3 dans le premier membre de la troisième équation (63), et l'on aura successivement :

$$(f_2, \xi) = \xi_1, \quad (f_2, \xi_1) = \xi_2, \ldots (f_2, \xi_{\mu-1}) = \xi_\mu, \text{ etc.}$$

On sait (n° 38) que toutes les fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_\mu, \ldots$ sont des intégrales des deux premières équations (63) (*) : mais, il est évident que, dans cette recherche, on doit nécessairement rencontrer une fonction ξ, qui sera une fonction des précédentes, par exemple,

$$\xi_\mu = \Pi(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\mu-1}).$$

On devra, par conséquent, s'arrêter à cette fonction, les suivantes $\xi_{\mu+1}, \ldots$ étant des fonctions de même espèce.

46. Cherchons maintenant une fonction des intégrales $F, f_1, f_2, \xi, \xi_1, \ldots \xi_{\mu-1}$, qui, mise à la place de F_3, satisfasse aux équations (63). Soit

$$F_3 = f_3(F, f_1, f_2, \xi, \xi_1, \ldots \xi_{\mu-1}),$$

cette fonction : un calcul analogue à celui que nous avons fait (n° 42) nous donnera, pour la déterminer, l'équation primordinale linéaire

$$\xi_1 \frac{df_3}{d\xi} + \xi_2 \frac{df_3}{d\xi_1} + \cdots + \Pi \frac{df_3}{d\xi_{\mu-1}} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

(*) On peut d'ailleurs le démontrer au moyen de la formule (51) : c'est ce qu'a fait M. Imschenetsky, *Mémoire sur l'intégration*, etc., pp. 70 et suiv.

dans laquelle les variables indépendantes sont $\xi, \xi_1, \ldots \xi_{\mu-1}$. Les quantités F, f_1, f_2, peuvent être considérées comme constantes, puisque l'équation (64) ne renferme pas de dérivées partielles relatives à ces variables. Il suffira donc de trouver une intégrale particulière de cette équation, ou une solution du système :

$$\frac{d\xi}{\xi_1} = \frac{d\xi_1}{\xi_2} = \ldots = \frac{d\xi_{\mu-1}}{\Pi}.$$

Si l'on égale à $d\tau$ la valeur commune de ces rapports, le système précédent pourra être remplacé par l'équation différentielle de l'ordre μ :

$$\frac{d^\mu \xi}{d\tau^\mu} = \Pi\left(\xi, \frac{d\xi}{d\tau}, \frac{d^2\xi}{d\tau^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\xi}{d\tau^{\mu-1}}\right).$$

Si

$$\zeta\left(\xi, \frac{d\xi}{d\tau}, \frac{d^2\xi}{d\tau^2}, \ldots \frac{d^{\mu-1}\xi}{d\tau^{\mu-1}}\right) = \text{const},$$

est une intégrale première de cette équation, nous pouvons poser, en remplaçant les dérivées par leurs valeurs $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\mu-1}$,

$$F_3 = \zeta(\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_{\mu-1}) = a_2,$$

et nous aurons ainsi l'intégrale commune aux équations (63).

47. La même méthode s'applique sans aucune difficulté à la recherche des fonctions

$$F_4 = a_4, \ldots F_{n-1} = a_{n-1}.$$

De ces fonctions, jointes aux précédentes :

$$F = a, \quad F_1 = a_1, \quad F_2 = a_2, \quad F_3 = a_3,$$

on déduit les valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, qui rendent l'expression

$$dz = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n,$$

une différentielle exacte.

48. On voit, par les développements que nous venons de donner, que la méthode précédente peut toujours conduire au résultat. Seulement, dans certains cas, elle paraît en défaut : mais nous avons indiqué le moyen de lever les difficultés auxquelles elle donne lieu. Dans le chapitre suivant, nous exposerons

une nouvelle transformation des équations, qui nous permettra de donner aux équations linéaires dont dépend le problème, une forme plus simple, laquelle aura de plus l'avantage de ne jamais être en défaut.

49. *Applications.* — 1° Soit à intégrer l'équation primordinale suivante :

$$p_1p_2p_3 = q_1q_2q_3.$$

Posons

$$F = p_1p_2p_3 - q_1q_2q_3 = 0;$$

nous devons (n° 33) trouver deux autres fonctions

$$F_1(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = a_1,$$
$$F_2(q_1, q_2, q_3, p_1, p_2, p_3) = a_2.$$

Pour déterminer F_1, nous avons à chercher une intégrale de l'équation

$$(F, F_1) = 0,$$

ou bien une intégrale du système (n° 40) :

$$\frac{dq_1}{p_2p_3} = \frac{dq_2}{p_1p_3} = \frac{dq_3}{p_1p_2} = \frac{dp_1}{q_2q_3} = \frac{dp_2}{q_1q_3} = \frac{dp_3}{q_1q_2}. \quad . \quad . \quad (54^{bis})$$

Si nous multiplions ces rapports par $p_1p_2p_3$ ou $q_1q_2q_3$, il vient :

$$p_1dq_1 = p_2dq_2 = p_3dq_3 = q_1dp_1 = q_2dp_2 = q_3dp_3.$$

Le premier et le quatrième membres nous donnent :

$$\frac{dp_1}{p_1} = \frac{dq_1}{q_1},$$

d'où

$$p_1 = \alpha_1 q_1;$$

nous pouvons donc poser (n° 40)

$$F_1 = p_1 - \alpha_1 q_1 = 0,$$

α_1 étant la constante.

La fonction F_2 sera déterminée (n° 41) par les deux équations simultanées

$$(F, F_2) = 0, \quad (F_1, F_2) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56^{bis})$$

Nous devons chercher une intégrale de la première de ces

équations, ce qui nous conduit à trouver une intégrale du système (54bis) différente de F_1.

Or, si nous prenons le deuxième et le cinquième membres, il vient :

$$p_2 dq_2 = q_2 dp_2;$$

par suite,

$$p_2 = \alpha_2 q_2.$$

En posant

$$\varphi = p_2 - \alpha_2 q_2,$$

et remplaçant F_2 par φ dans la seconde des équations (56bis), nous aurons :

$$\varphi_1 = (F_1, \varphi) = 0;$$

par conséquent (n° 41),

$$\varphi = p_2 - \alpha_2 q_2 = 0,$$

est la solution commune aux équations (56bis), et nous aurons, pour déterminer p_1, p_2, p_3, les trois équations :

$$\left.\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 &= q_1 q_2 q_3, \\ p_1 &= \alpha_1 q_1, \\ p_2 &= \alpha_2 q_2. \end{aligned}\right\}$$

Elles nous donnent :

$$p_1 = \alpha_1 q_1, \quad p_2 = \alpha_2 q_2, \quad p_3 = \frac{q_3}{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Par suite,

$$dz = \alpha_1 q_1 dq_1 + \alpha_2 q_2 dq_2 + \frac{q_3}{\alpha_1 \alpha_2} dq_3;$$

d'où

$$z = \alpha_1 \frac{q_1^2}{2} + \alpha_2 \frac{q_2^2}{2} + \frac{q_3^2}{2\alpha_1 \alpha_2} + \beta,$$

sera l'intégrale complète de la proposée, renfermant trois constantes arbitraires.

Pour obtenir l'intégrale générale, il faut (n° 8) poser $\beta = \pi(\alpha_1, \alpha_2)$, π étant une fonction arbitraire, et éliminer α_1, α_2, entre les trois équations suivantes :

$$z - \frac{\alpha_1 q_1^2}{2} - \frac{\alpha_2 q_2^2}{2} - \frac{q_3^2}{2\alpha_1 \alpha_2} - \pi(\alpha_1, \alpha_2) = 0,$$

$$-\frac{q_1^2}{2}+\frac{q_3^2}{2\alpha_1^2\alpha_2}-\pi'(\alpha_1,\alpha_2)=0,$$

$$-\frac{q_2^2}{2}+\frac{q_3^2}{2\alpha_1\alpha_2^2}-\pi'(\alpha_1,\alpha_2)=0.$$

50. 2° Soit à intégrer l'équation primordinale :

$$p_1q_1^2=p_2^2+2\alpha.$$

Nous aurons :

$$F=p_1q_1^2-p_2^2-2\alpha=0.$$

En posant

$$(F,F_1)=0,$$

on a le système :

$$\frac{dq_1}{-q_1^2}=\frac{dq_2}{2p_2}=\frac{dp_1}{2p_1q_1}=\frac{dp_2}{0};$$

d'où

$$p_2=a_1.$$

Par suite,

$$p_1=\frac{a_1^2+2\alpha}{q_1^2}.$$

Nous aurons alors :

$$dz=\frac{a_1^2+2\alpha}{q_1^2}dq_1+a_1dq_2;$$

d'où

$$z=-\frac{a_1^2+2\alpha}{q_1}+a_1q_2+\beta,$$

sera l'intégrale complète de la proposée.

L'intégrale générale est donnée par l'élimination de a_1 entre les équations suivantes :

$$z=a_1q_2-\frac{a_1^2+2\alpha}{q_1}+\varphi(a_1),$$

$$o=q_2-\frac{2a_1}{q_1}+\varphi'(a_1),$$

51. 3° On verra de même que l'intégrale complète de l'équation

$$p_1+\frac{p_2^2}{2}-p_2q_1+\alpha=0,$$

est

$$z=\gamma q_2+\frac{\gamma q_1^2}{2}-\frac{\gamma^2q_1}{2}-\alpha q_1+\beta.$$

Par conséquent, l'intégrale générale s'obtient par l'élimination de γ entre les deux équations suivantes :

$$z = \gamma q_2 + \frac{\gamma q_1^2}{2} - \frac{\gamma^2 q_1}{2} - \alpha q_1 + \varphi(\gamma),$$

$$0 = q_2 + \frac{q_1^2}{2} - \gamma q_1 + \varphi'(\gamma).$$

VII.

AUTRE MÉTHODE D'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS PRIMORDINALES. — APPLICATIONS.

52. La méthode que nous allons exposer repose sur une transformation très-simple des équations du problème (*) : nous l'effectuerons sur les équations générales (37) :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_1}{dq_{i+1}} &= \frac{dp_{i+1}}{dq_1} - \frac{dp_1}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+1}} - \frac{dp_1}{dp_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+2}} - \cdots - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{dp_{i+1}}{dq_n} \\
&\qquad + \frac{dp_1}{dq_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dp_{i+2}} + \cdots + \frac{dp_1}{dq_n}\frac{dp_{i+1}}{dp_n}, \\
\frac{dp_2}{dq_{i+1}} &= \frac{dp_{i+1}}{dq_2} - \frac{dp_2}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+1}} - \frac{dp_2}{dp_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+2}} - \cdots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{dp_{i+1}}{dq_n} \\
&\qquad + \frac{dp_2}{dq_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dp_{i+2}} + \cdots + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{dp_{i+1}}{dp_n}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dp_i}{dq_{i+1}} &= \frac{dp_{i+1}}{dq_i} - \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+1}} - \frac{dp_i}{dp_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dq_{i+2}} - \cdots - \frac{dp_i}{dp_n}\frac{dp_{i+1}}{dq_n} \\
&\qquad + \frac{dp_i}{dq_{i+2}}\frac{dp_{i+1}}{dp_{i+2}} + \cdots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{dp_{i+1}}{dp_n}.
\end{aligned}\right\} \quad (37)$$

(*) Cette transformation est due à JACOBI, *Nova methodus integrandi*, etc., JOURNAL DE CRELLE, t. LX, p. 22. — Ibid., *Vorlesungen über Dynamik*, pp. 291 et suiv.

A cet effet, soit, en général,

$$f_i(p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n) = a, \quad \dots \quad (65)$$

la solution commune des i équations (37), laquelle doit donner p_{i+1} en fonction de $p_{i+2}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$. Nous aurons, en désignant par p, q, respectivement une des quantités $p_{i+2}, \dots p_n$, ou $q_1, q_2, \dots q_n$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_i}{dp} + \frac{df_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dp} &= 0, \\ \frac{df_i}{dq} + \frac{df_i}{dp_{i+1}}\frac{dp_{i+1}}{dq} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \dots \quad (66)$$

en multipliant les équations (37) par $\frac{df_i}{dp_{i+1}}$, il viendra, en vertu de (66),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{df_i}{dq_1} + \frac{dp_1}{dq_{i+1}}\frac{df_i}{dp_{i+1}} + \frac{dp_1}{dq_{i+2}}\frac{df_i}{dp_{i+2}} + \dots + \frac{dp_1}{dq_n}\frac{df_i}{dp_n} \\ &\quad - \frac{dp_1}{dp_{i+1}}\frac{df_i}{dq_{i+1}} - \frac{dp_1}{dp_{i+2}}\frac{df_i}{dq_{i+2}} - \dots - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{df_i}{dq_n} = 0, \\ &\frac{df_i}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_{i+1}}\frac{df_i}{dp_{i+1}} + \frac{dp_2}{dq_{i+2}}\frac{df_i}{dp_{i+2}} + \dots + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{df_i}{dp_n} \\ &\quad - \frac{dp_2}{dp_{i+1}}\frac{df_i}{dq_{i+1}} - \frac{dp_2}{dp_{i+2}}\frac{df_i}{dq_{i+2}} - \dots - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{df_i}{dq_n} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{df_i}{dq_i} + \frac{dp_i}{dq_{i+1}}\frac{df_i}{dp_{i+1}} + \frac{dp_i}{dq_{i+2}}\frac{df_i}{dp_{i+2}} + \dots + \frac{dp_i}{dq_n}\frac{df_i}{dp_n} \\ &\quad - \frac{dp_i}{dp_{i+1}}\frac{df_i}{dq_{i+1}} - \frac{dp_i}{dp_{i+2}}\frac{df_i}{dq_{i+2}} - \dots - \frac{dp_i}{dp_n}\frac{df_i}{dq_n} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Les fonctions $p_1, p_2, \dots p_i$, qui entrent dans ces équations linéaires, sont déterminées en fonction de $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$, par des systèmes analogues au précédent.

Ces équations (67) peuvent d'ailleurs être représentées par le type général :

$$\frac{df_i}{dq_\lambda} + \sum_{k=i+1}^{k=n}\left(\frac{dp_\lambda}{dq_k}\frac{df_i}{dp_k} - \frac{dp_\lambda}{dp_k}\frac{df_i}{dq_k}\right) = 0, \quad \dots \quad (68)$$

λ pouvant prendre toutes les valeurs $1, 2, 3, \dots i$.

Or, si nous observons que l'équation qui donne p_λ en fonction de $p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n$, est de la forme :

$$p_\lambda - \varphi_\lambda (p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n) = 0,$$

nous aurons évidemment, pour une valeur quelconque de l'indice m,

$$\frac{d(p_\lambda - \varphi_\lambda)}{dq_m} = -\frac{d\varphi_\lambda}{dq_m} = -\frac{dp_\lambda}{dq_m}.$$

De même :

1° Pour $m > i+1$,

$$\frac{d(p_\lambda - \varphi_\lambda)}{dp_m} = -\frac{d\varphi_\lambda}{dp_m} = -\frac{dp_\lambda}{dp_m};$$

2° Pour $m < i+1$,

$$\frac{d(p_\lambda - \varphi_\lambda)}{dp_m} = 0;$$

mais, pour $m = \lambda$, on a :

$$\frac{d(p_\lambda - \varphi_\lambda)}{dp_\lambda} = 1.$$

L'équation (68) peut donc être mise sous la forme symbolique (n° 22) :

$$(p_\lambda - \varphi_\lambda, f_i) = 0.$$

En désignant, en abrégé, par p_λ le premier membre de l'équation

$$p_\lambda - \varphi_\lambda (p_{i+1}, p_{i+2}, \dots p_n, q_1, q_2, \dots q_n) = 0,$$

on pourra encore écrire l'équation (68) sous la forme plus simple :

$$(p_\lambda, f_i) = 0. \quad \dots \quad (68^{bis})$$

Ce sont ces équations qui serviront à déterminer successivement les fonctions f desquelles on déduira les valeurs de $p_1, p_2, \dots p_n$.

53. Cela posé, on procédera de la manière suivante, pour intégrer l'équation primordinale $F = a$, a étant une constante qui peut être nulle :

Cette équation, résolue par rapport à p_1, nous donnera p_1, en fonction de $p_2, p_3, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$,

$$p_1 = \varphi_1(q_1, q_2, \ldots q_n, p_2, \ldots p_n, a). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

Puis, p_2 sera déterminée par une solution de l'équation primordinale linéaire

$$(p_1, f_1) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

ou

$$\frac{df_1}{dq_1} + \sum_{k=2}^{k=n} \left(\frac{dp_1}{dq_k}\frac{df_1}{dp_k} - \frac{dp_1}{dp_k}\frac{df_1}{dq_k} \right) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (70^{bis})$$

Pour obtenir cette solution, il suffit de chercher une intégrale particulière du système de $2n-2$ équations à $2n-1$ variables :

$$\frac{dq_1}{1} = \frac{dq_2}{-\frac{dp_1}{dp_2}} = \frac{dq_3}{-\frac{dp_1}{dp_3}} = \cdots = \frac{dq_n}{-\frac{dp_1}{dp_n}} = \frac{dp_2}{\frac{dp_1}{dq_2}} = \cdots = \frac{dp_n}{\frac{dp_1}{dq_n}}. \quad (71)$$

Si l'on désigne cette intégrale par

$$f_1 = a_1,$$

a_1 étant une constante arbitraire, cette équation servira à calculer p_2, en fonction de $p_3, p_4, \ldots p_n, q_1, q_2, \ldots q_n$,

$$p_2 = \varphi_2(q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, p_4, \ldots p_n, a, a_1). \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

En substituant cette valeur de p_2 dans l'expression (69) de p_1, cette dernière sera aussi exprimée au moyen de $q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, p_4, \ldots p_n$,

$$p_1 = \varphi_1'(q_1, q_2, \ldots q_n, p_3, p_4, \ldots p_n, a, a_1). \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

54. Cela fait, nous passerons au calcul de p_3, qui sera donnée par une intégrale commune aux deux équations linéaires :

$$(p_1, f_2) = 0, \quad (p_2, f_2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

satisfaisant à la condition

$$(p_1, p_2) = 0.$$

Ces équations (74) peuvent être mises sous la forme suivante :

$$\left.\begin{aligned}\frac{df_2}{dq_1}+\sum_{k=3}^{k=n}\left(\frac{dp_1}{dq_k}\frac{df_2}{dp_k}-\frac{dp_1}{dp_k}\frac{df_2}{dq_k}\right)=0,\\ \frac{df_2}{dq_2}+\sum_{k=3}^{k=n}\left(\frac{dp_2}{dq_k}\frac{df_2}{dp_k}-\frac{dp_2}{dp_k}\frac{df_2}{dq_k}\right)=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(74^{bis})$$

Or, d'après ce que nous avons vu (n° 34), pour obtenir cette intégrale commune, on commencera par déterminer une solution particulière de l'une de ces équations, de la première, par exemple, c'est-à-dire une solution du système des $2(n-2)$ équations simultanées ordinaires

$$\frac{dq_1}{1}=\frac{dq_3}{-\frac{dp_1}{dp_3}}=\cdots=\frac{dq_n}{-\frac{dp_1}{dp_n}}=\frac{dp_3}{\frac{dp_1}{dq_3}}=\cdots=\frac{dp_n}{\frac{dp_1}{dq_n}}\quad\ldots\quad(75)$$

Si $\psi=const.$ est cette intégrale qui contiendra q_2 comme constante, nous formerons les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}\psi_1=(p_2,\psi)&=\frac{d\psi}{dq_2}+\sum_{k=3}^{k=n}\left(\frac{dp_2}{dq_k}\frac{d\psi}{dp_k}-\frac{dp_2}{dp_k}\frac{d\psi}{dq_k}\right),\\ \psi_2=(p_2,\psi_1)&=\frac{d\psi_1}{dq_2}+\sum_{k=3}^{k=n}\left(\frac{dp_2}{dq_k}\frac{d\psi_1}{dp_k}-\frac{dp_2}{dp_k}\frac{d\psi_1}{dq_k}\right),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \psi_\mu=(p_2,\psi_{\mu-1})&=\frac{d\psi_{\mu-1}}{dq_2}+\sum_{k=3}^{k=n}\left(\frac{dp_2}{dq_k}\frac{d\psi_{\mu-1}}{dp_k}-\frac{dp_2}{dp_k}\frac{d\psi_{\mu-1}}{dq_k}\right),\end{aligned}$$

lesquelles, d'après le théorème de *Jacobi*, sont des intégrales de la première équation (74^{bis}).

55. Dans la recherche des fonctions ψ, il peut, comme au n° 42, arriver trois cas :

1° Une fonction ψ_μ sera exprimée au moyen des précédentes ;

2° Ou bien, cette fonction ψ_μ se réduira à une constante ;

3° Ou bien, ψ_μ sera nulle.

56. *1^er^ cas.* — Soit

$$\psi_\mu=\xi(q_2,\psi,\psi_1,\psi_2,\ldots\psi_{\mu-1}),$$

l'indice μ étant évidemment $\leqq 2\,(n-2)$, et q_2 étant une constante. Il est alors inutile de continuer; car les nouvelles fonctions, qui sont toujours des intégrales de la première équation (74^{bis}), seront toutes exprimées au moyen des intégrales précédentes. Elles ne fourniront aucune solution nouvelle de la question; en effet, on sait que *toute fonction d'une ou de plusieurs intégrales d'une équation différentielle est encore une intégrale de cette même équation.* La forme de la fonction de $q_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{\mu-1}$, qui satisfait à la première équation (74^{bis}), étant tout à fait arbitraire, nous pourrons la choisir de telle manière qu'elle vérifie la seconde de ces équations.

Supposons donc que

$$\zeta(q_2, \psi, \psi_1, \ldots \psi_{\mu-1}) = \text{const},$$

soit la fonction cherchée, et remplaçons f_2 par ζ dans la seconde des équations (74) ou (74^{bis}). Nous aurons :

$$(p_2, \zeta) = 0,$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\zeta}{dq_2} + \frac{d\zeta}{d\psi}\frac{d\psi}{dq_2} + \frac{d\zeta}{d\psi_1}\frac{d\psi_1}{dq_2} + \cdots + \frac{d\zeta}{d\psi_{\mu-1}}\frac{d\psi_{\mu-1}}{dq_2} \\
&+ \frac{dp_2}{dq_3}\left(\frac{d\zeta}{d\psi}\frac{d\psi}{dp_3} + \frac{d\zeta}{d\psi_1}\frac{d\psi_1}{dp_3} + \cdots + \frac{d\zeta}{d\psi_{\mu-1}}\frac{d\psi_{\mu-1}}{dp_3}\right) \\
&+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+ \frac{dp_2}{dq_n}\left(\frac{d\zeta}{d\psi}\frac{d\psi}{dp_n} + \frac{d\zeta}{d\psi_1}\frac{d\psi_1}{dp_n} + \cdots + \frac{d\zeta}{d\psi_{\mu-1}}\frac{d\psi_{\mu-1}}{dp_n}\right) \\
&- \frac{dp_2}{dp_3}\left(\frac{d\zeta}{d\psi}\frac{d\psi}{dq_3} + \frac{d\zeta}{d\psi_1}\frac{d\psi_1}{dq_3} + \cdots + \frac{d\zeta}{d\psi_{\mu-1}}\frac{d\psi_{\mu-1}}{dq_3}\right) \\
&- \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&- \frac{dp_2}{dp_n}\left(\frac{d\zeta}{d\psi}\frac{d\psi}{dq_n} + \frac{d\zeta}{d\psi_1}\frac{d\psi_1}{dq_n} + \cdots + \frac{d\zeta}{d\psi_{\mu-1}}\frac{d\psi_{\mu-1}}{dq_n}\right)
\end{aligned}\right\} = 0.$$

Cette équation se réduit à la suivante :

$$\frac{d\zeta}{dq_2} + \psi_1\frac{d\zeta}{d\psi} + \psi_2\frac{d\zeta}{d\psi_1} + \cdots + \xi\frac{d\zeta}{d\psi_{\mu-1}} = 0; \quad \ldots \quad (76)$$

la fonction ζ sera déterminée par une intégrale de cette équation linéaire, ou par une intégrale du système ordinaire :

$$\frac{dq_2}{1} = \frac{d\psi}{\psi_1} = \frac{d\psi_1}{\psi_2} = \dots = \frac{d\psi_{\mu-2}}{\psi_{\mu-1}} = \frac{d\psi_{\mu-1}}{\xi}.$$

Mais ce système nous donne successivement :

$$\psi_1 = \frac{d\psi}{dq_2}, \quad \psi_2 = \frac{d\psi_1}{dq_2} = \frac{d^2\psi}{dq_2^2}, \dots \xi = \frac{d\psi_{\mu-1}}{dq_2} = \frac{d^\mu\psi}{dq_2^\mu}.$$

Par conséquent, la fonction ζ est une intégrale première de l'équation ordinaire de l'ordre μ :

$$\frac{d^\mu\psi}{dq_2^\mu} = \xi\left(q_2, \psi, \frac{d\psi}{dq_2}, \frac{d^2\psi}{dq_2^2}, \dots \frac{d^{\mu-1}\psi}{dq_2^{\mu-1}}\right). \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

Si

$$\zeta\left(q_2, \psi, \frac{d\psi}{dq_2}, \dots \frac{d^{\mu-1}\psi}{dq_2^{\mu-1}}\right) = \text{const},$$

est cette intégrale première, l'intégrale cherchée commune aux équations (74^{bis}) sera, en remplaçant les dérivées de ψ par leurs valeurs,

$$\zeta(q_2, \psi, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_{\mu-1}) = \text{const.}$$

L'équation

$$f_2 = \zeta(q_2, \psi, \psi_1, \psi_2, \dots \psi_{\mu-1}) = a_2,$$

donnera p_3, en fonction de $p_4, \dots p_n, q_1, \dots q_n, a, a_1, a_2$,

$$p_3 = \varphi_3(q_1, q_2, \dots q_n, p_4, \dots p_n, a, a_1, a_2). \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

57. 2^{me} *cas.* — Si la fonction ψ_μ se réduit à une constante, nous aurons :

$$\psi_\mu = c;$$

l'équation (77) devient alors :

$$\frac{d^\mu\psi}{dq_2^\mu} = c.$$

On en tire, par l'intégration,

$$\frac{d^{\mu-1}\psi}{dq_2^{\mu-1}} - cq_2 = \text{const},$$

et l'intégrale commune est :

$$f_2 = \psi_{\mu-1} - cq_2 = a_2.$$

58. 3^{me} *cas.* — Enfin, si $\psi_\mu = 0$, on a évidemment

$$f_2 = \psi_{\mu-1} = a_2,$$

pour la solution commune.

59. **Remarque I.** — Il est, pour ainsi dire, inutile de faire observer que l'on aurait pu renverser l'ordre des opérations, c'est-à-dire commencer par rechercher une intégrale particulière de la seconde des équations (74^{bis}), ou une solution du système ordinaire que l'on en déduirait, et faire sur la première des équations (74^{bis}), les opérations que nous avons effectuées sur la seconde.

60. **Remarque II.** — Si $\mu = 1$, il vient :

$$\psi_1 = \xi(q_2, \psi),$$

et la fonction f_2 s'obtient très-facilement.

En effet,

$$\zeta(q_2, \psi) = \text{const},$$

étant l'intégrale commune, l'équation

$$(p_2, \zeta) = 0,$$

nous donne

$$\frac{d\zeta}{dq_2} + \xi(q_2, \psi)\frac{d\zeta}{d\psi} = 0.$$

L'intégrale de cette dernière, ou une solution de l'équation

$$\frac{dq_2}{1} = \frac{d\psi}{\xi(q_2, \psi)},$$

que l'on peut écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d\psi}{dq_2} = \xi(q_2, \psi),$$

nous fournira l'intégrale commune cherchée. Cette intégrale

existe toujours, même lorsque l'une des quantités q_2, ψ, ou toutes les deux, n'entreraient pas dans ξ.

61. Quel que soit le cas qui se présente, il est donc toujours possible de trouver la fonction

$$p_3 = \varphi_3(q_1, q_2, \dots q_n, p_4, \dots p_n, a, a_1, a_2), \quad . \quad . \quad . \quad (78)$$

que nous substituerons dans les valeurs (75) et (72) de p_1, p_2; nous aurons ainsi :

$$p_1 = \varphi_1''(q_1, q_2, \dots q_n, p_4, \dots p_n, a, a_1, a_2), \quad . \quad . \quad . \quad (79)$$
$$p_2 = \varphi_2'(q_1, q_2, \dots q_n, p_4, \dots p_n, a, a_1, a_2). \quad . \quad . \quad . \quad (80)$$

62. La fonction p_4 sera déterminée par l'équation

$$f_3(q_1, q_2, \dots q_n, p_4, p_5, \dots p_n, a, a_1, a_2) = a_3,$$

laquelle sera une solution commune aux trois équations linéaires :

$$(p_1, f_3) = 0, \quad (p_2, f_3) = 0, \quad (p_3, f_3) = 0, \quad . \quad . \quad (81)$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned} \frac{df_3}{dq_1} + \sum_{k=4}^{k=n}\left(\frac{dp_1}{dq_k}\frac{df_3}{dp_k} - \frac{dp_1}{dp_k}\frac{df_3}{dq_k}\right) &= 0, \\ \frac{df_3}{dq_2} + \sum_{k=4}^{k=n}\left(\frac{dp_2}{dq_k}\frac{df_3}{dp_k} - \frac{dp_2}{dp_k}\frac{df_3}{dq_k}\right) &= 0, \\ \frac{df_3}{dq_3} + \sum_{k=4}^{k=n}\left(\frac{dp_3}{dq_k}\frac{df_3}{dp_k} - \frac{dp_3}{dp_k}\frac{df_3}{dq_k}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (81^{bis})$$

On commence par déterminer, comme ci-dessus, une solution

$$\Psi(q_1, q_2, \dots q_n, p_4, \dots p_n) = \text{const},$$

commune aux deux premières équations (81^{bis}), solution qui pourra contenir q_3 comme constante.

Cela fait, on remplace f_3 par Ψ dans la troisième, et l'on forme les expressions suivantes :

$$\Psi_1 = (p_3, \Psi) = \frac{d\Psi}{dq_3} + \sum_{k=4}^{k=n}\left(\frac{dp_3}{dq_k}\frac{d\Psi}{dp_k} - \frac{dp_3}{dp_k}\frac{d\Psi}{dq_k}\right),$$

$$\Psi_2 = (p_3, \Psi_1) = \frac{d\Psi_1}{dq_3} + \sum_{k=4}^{k=n}\left(\frac{dp_3}{dq_k}\frac{d\Psi_1}{dp_k} - \frac{dp_3}{dp_k}\frac{d\Psi_1}{dq_k}\right), \text{ etc.}$$

lesquelles seront des intégrales de la première et de la deuxième équation (*).

63. On arrive ainsi à une fonction Ψ_ν, qui sera ou une fonction des précédentes, ou une constante, ou zéro.

Dans le premier cas, où l'on a

$$\Psi_\nu = \Phi(q_3, \Psi, \Psi_1, \ldots \Psi_{\nu-1}),$$

ν étant un nombre $\leqq 2(n-3)$, nous chercherons à déterminer la forme de la fonction arbitraire de $q_3, \Psi, \Psi_1, \ldots \Psi_{\nu-1}$, satisfaisant aux deux premières équations (81), et qui vérifie en même temps la troisième.

Désignons par

$$\Pi(q_3, \Psi, \Psi_1, \ldots \Psi_{\nu-1}) = \text{const},$$

cette fonction, et remplaçons f_3 par Π dans la troisième équation (81). Nous obtiendrons l'équation linéaire

$$(p_3, \Pi) = \frac{d\Pi}{dq_3} + \Psi_1 \frac{d\Pi}{d\Psi} + \Psi_2 \frac{d\Pi}{d\Psi_1} + \cdots + \Phi \frac{d\Pi}{d\Psi_{\nu-1}} = 0. \quad (82)$$

La fonction Π sera une intégrale particulière de cette équation, ou une intégrale du système ordinaire :

$$\frac{dq_3}{1} = \frac{d\Psi}{\Psi_1} = \frac{d\Psi_1}{\Psi_2} = \cdots = \frac{d\Psi_{\nu-1}}{\Phi},$$

ou encore une intégrale première de l'équation de l'ordre ν :

$$\frac{d^\nu \Psi}{dq_3^\nu} = \Phi\left(q_3, \Psi, \frac{d\Psi}{dq_3}, \ldots \frac{d^{\nu-1}\Psi}{dq_3^{\nu-1}}\right). \quad (83)$$

Si

$$\Pi\left(q_3, \Psi, \frac{d\Psi}{dq_3}, \cdots \frac{d^{\nu-1}\Psi}{dq_3^{\nu-1}}\right) = \text{const},$$

est cette intégrale première, la solution commune aux équations (81) s'obtiendra en posant

$$f_3 = \Pi(q_3, \Psi, \Psi_1, \ldots \Psi_{\nu-1}) = a_3.$$

(*) On le démontre facilement au moyen de la formule (51).

Cette dernière nous permet de déterminer p_4 en fonction de q_1, $q_2, \dots q_n, p_5, \dots p_n$,

$$p_4 = \varphi_4(q_1, q_2, \dots q_n, p_5, \dots p_n, a, a_1, a_2, a_3). \quad . \quad . \quad (84)$$

Les deux autres cas, où ν est égale à une constante, ou à zéro, ne sont que des cas particuliers du précédent, et s'en déduisent facilement.

64. La valeur de p_4 étant connue, on la substituera dans les expressions (78), (79) et (80) de p_1, p_2, p_3; on obtient ainsi :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1'''(q_1, q_2, \dots q_n, p_5, \dots p_n, a, a_1, a_2, a_3), \\ p_2 &= \varphi_2''(q_1, q_2, \dots q_n, p_5, \dots p_n, a, a_1, a_2, a_3), \\ p_3 &= \varphi_3'(q_1, q_2, \dots q_n, p_5, \dots p_n, a, a_1, a_2, a_3). \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (85)$$

65. On continuera de la même manière à déterminer les diverses fonctions f, qui donnent les quantités p.

Supposons que l'on ait trouvé les $n-1$ premières :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1^{(n-2)}(q_1, q_2, \dots q_n, p_n, a, a_1, \dots a_{n-2}), \\ p_2 &= \varphi_2^{(n-3)}(q_1, q_2, \dots q_n, p_n, a, a_1, \dots a_{n-2}), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_{n-1} &= \varphi_{n-1}(q_1, q_2, \dots q_n, p_n, a, a_1, \dots a_{n-2}), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (86)$$

et proposons-nous de déterminer l'équation

$$f_{n-1}(q_1, q_2, \dots q_n, p_n, a, a_1, \dots a_{n-2}) = a_{n-1}, \quad . \quad . \quad (87)$$

de laquelle on doit déduire p_n, en fonction de $q_1, q_2, \dots q_n$.

Cette fonction f_{n-1} devra satisfaire aux $n-1$ équations :

$$(p_1, f_{n-1}) = 0, \quad (p_2, f_{n-1}) = 0, \dots (p_{n-1}, f_{n-1}) = 0, \quad . \quad (88)$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{df_{n-1}}{dq_1} + \frac{dp_1}{dq_n}\frac{df_{n-1}}{dp_n} - \frac{dp_1}{dp_n}\frac{df_{n-1}}{dq_n} = 0, \\ &\frac{df_{n-1}}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{df_{n-1}}{dp_n} - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{df_{n-1}}{dq_n} = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{df_{n-1}}{dq_{n-1}} + \frac{dp_{n-1}}{dq_n}\frac{df_{n-1}}{dp_n} - \frac{dp_{n-1}}{dp_n}\frac{df_{n-1}}{dq_n} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (88^{bis})$$

66. Pour trouver la solution commune à ces équations, on opère de la manière suivante :

On commence par chercher une intégrale de la première, ou une intégrale du système ordinaire :

$$\frac{dq_1}{1} = \frac{dq_n}{-\frac{dp_1}{dp_n}} = \frac{dp_n}{\frac{dp_1}{dq_n}}.$$

Si $\Xi = const.$ est cette intégrale renfermant p_n, q_1, q_n, et, en outre, $q_2, q_3, \ldots q_{n-1}$, considérées comme des constantes, on aura, par des substitutions dans la seconde,

$$\Xi_1 = (p_2, \Xi) = \frac{d\Xi}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{d\Xi}{dp_n} - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{d\Xi}{dq_n},$$
$$\Xi_2 = (p_2, \Xi_1) = \frac{d\Xi_1}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_n}\frac{d\Xi_1}{dp_n} - \frac{dp_2}{dp_n}\frac{d\Xi_1}{dq_n}.$$

Il arrivera, ou bien que Ξ_1 sera une fonction de $\Xi, q_2, \ldots q_n$, et alors l'intégrale des deux premières équations (88bis) s'obtiendra en intégrant l'équation du premier ordre

$$\frac{d\Xi}{dq_2} = \Xi_1;$$

ou bien, Ξ_2 sera une fonction de $\Xi, \Xi_1, q_2, \ldots q_n$, et alors l'intégrale de ces deux équations sera une des deux intégrales premières de l'équation du second ordre

$$\frac{d^2\Xi}{dq_2^2} = \Xi_2\left(\Xi, \frac{d\Xi}{dq_2}, q_2, \ldots q_n\right),$$

à la condition de remplacer $\frac{d\Xi}{dq_2}$ par Ξ_1 dans cette intégrale première.

67. Si l'on désigne par Ω l'intégrale commune ainsi déterminée, on formera, pour trouver la solution commune aux trois premières, les deux expressions suivantes :

$$\Omega_1 = (p_3, \Omega) = \frac{d\Omega}{dq_3} + \frac{dp_3}{dq_n}\frac{d\Omega}{dp_n} - \frac{dp_3}{dp_n}\frac{d\Omega}{dq_n},$$
$$\Omega_2 = (p_3, \Omega_1) = \frac{d\Omega_1}{dq_3} + \frac{dp_3}{dq_n}\frac{d\Omega_1}{dp_n} - \frac{dp_3}{dp_n}\frac{d\Omega_1}{dq_n}.$$

L'intégrale cherchée sera donnée par l'intégration de l'équation du premier ordre :

$$\frac{d\Omega}{dq_3} = \Omega_1,$$

si Ω_1 est une fonction de $\Omega, q_3, \ldots q_n$; ou bien, par l'intégration de l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2\Omega}{dq_3^2} = \Omega_2\left(\Omega, \frac{d\Omega}{dq_3}, q_3, \ldots q_n\right),$$

si Ω_2 est une fonction de $\Omega, \Omega_1, q_3, \ldots q_n$.

68. On continue de la même manière jusqu'à ce que l'on arrive à la fonction

$$f_{n-1} = a_{n-1}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (87)$$

intégrale commune des équations (88).

Cette équation (87) nous donne :

$$p_n = \varphi_n(q_1, q_2, \ldots q_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}); \quad \ldots \quad (89)$$

en substituant cette valeur dans (86), il vient :

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1^{(n-1)}(q_1, q_2, \ldots q_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}),\\ p_2 &= \varphi_2^{(n-2)}(q_1, q_2, \ldots q_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ p_{n-1} &= \varphi'_{n-1}(q_1, q_2, \ldots q_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}),\\ p_n &= \varphi_n(q_1, q_2, \ldots q_n, a, a_1, \ldots a_{n-1}). \end{aligned}\right\} \ldots \quad (90)$$

Alors, en intégrant l'expression

$$dz = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n,$$

laquelle est une différentielle exacte, on obtient l'intégrale complète cherchée :

$$z = \int(\varphi_1^{(n-1)} dq_1 + \varphi_2^{(n-2)} dq_2 + \cdots + \varphi_n dq_n) + a_n.$$

69. *Applications.* — 1° Reprenons l'équation (n° 49) :

$$p_1 p_2 p_3 = q_1 q_2 q_3.$$

En la résolvant par rapport à p_1, nous aurons :

$$p_1 = \frac{q_1 q_2 q_2}{p_2 p_3} = \varphi_1, \quad \ldots \ldots \quad (69^{bis})$$

et il nous reste à déterminer les équations

$$f_1(q_1, q_2, q_3, p_2, p_3) = a_1,$$
$$f_2(q_1, q_2, q_3, p_2, p_3) = a_2.$$

La fonction f_1 sera une intégrale de l'équation linéaire (70)

$$(p_1, f_1) = 0,$$

c'est-à-dire de l'équation :

$$\frac{df_1}{dq_1} + \frac{dp_1}{dq_2}\frac{df_1}{dp_2} - \frac{dp_1}{dp_2}\frac{df_1}{dq_2} + \frac{dp_1}{dq_3}\frac{df_1}{dp_3} - \frac{dp_1}{dp_3}\frac{df_1}{dq_3} = 0.$$

Nous devons donc déterminer une solution quelconque, renfermant p_2, du système (71) :

$$\frac{dq_1}{1} = \frac{dq_2}{\frac{q_1 q_2 q_3}{p_2^2 p_3}} = \frac{dq_3}{\frac{q_1 q_2 q_3}{p_2 p_3^2}} = \frac{dp_2}{\frac{q_1 q_3}{p_2 p_3}} = \frac{dp_3}{\frac{q_1 q_2}{p_2 p_3}}.$$

Or, le second et le quatrième rapports nous donnent :

$$q_2 dp_2 = p_2 dq_2,$$

ou bien :

$$p_2 = \alpha q_2;$$

c'est l'équation $f_1 = a_1$, résolue par rapport à p_2.

En substituant cette valeur

$$p_2 = \alpha q_2 = \varphi_2,$$

dans l'équation (69bis), nous aurons :

$$p_1 = \frac{q_1 q_3}{\alpha p_3} = \varphi_1'.$$

La fonction $f_2 = a_2$, sera déterminée par une intégrale des deux équations linéaires (74) :

$$(p_1, f_2) = 0, \quad (p_2, f_2) = 0,$$

ou bien :

$$\frac{df_2}{dq_1}+\frac{dp_1}{dq_3}\frac{df_2}{dp_3}-\frac{dp_1}{dp_3}\frac{df_2}{dq_3}=0,$$
$$\frac{df_2}{dq_2}+\frac{dp_2}{dq_3}\frac{df_2}{dp_3}-\frac{dp_2}{dp_3}\frac{df_2}{dq_3}=0.$$

L'intégration de la première de ces deux équations se réduit à la recherche d'une intégrale du système

$$\frac{dq_1}{\frac{q_1q_3}{\alpha p_3^2}}=\frac{dq_3}{\frac{q_1}{\alpha p_3}}=\frac{dp_3}{\cdot}.$$

Les deux derniers rapports nous donnent :

$$\frac{dq_3}{q_3}=\frac{dp_3}{p_3},$$

d'où

$$\frac{p_3}{q_3}=\beta.$$

Par conséquent, nous devons remplacer, dans la seconde équation, f_2 par

$$\psi=\frac{p_3}{q_3};$$

nous aurons identiquement :

$$\psi_1=(p_2,\psi)=0,$$

puisque ψ ne contient pas q_2, et que p_2 ne contient ni p_3, ni q_3 : il en résulte que la solution commune aux deux équations est

$$\psi=\beta, \quad \text{ou} \quad p_3=\beta q_3.$$

Le problème proposé est donc résolu par les trois équations suivantes :

$$p_1=\frac{q_1}{\alpha\beta},$$
$$p_2=\alpha q_2,$$
$$p_3=\beta q_3.$$

Par suite, l'expression

$$dz = \frac{q_1}{\alpha\beta}\,dq_1 + \alpha q_2 dq_2 + \beta q_3 dq_3,$$

donne l'intégrale complète trouvée ci-dessus (n° 49) :

$$z = \frac{q_1^2}{2\alpha\beta} + \frac{\alpha q_2^2}{2} + \frac{\beta q_3^2}{2} + \gamma.$$

70. 2° Soit encore l'équation primordinale :

$$z - ap_1p_2 = 0.$$

Cette équation renfermant la fonction inconnue z, nous devons d'abord lui appliquer le procédé du n° 18, pour la réduire à une autre qui ne renferme pas cette fonction.

A cet effet, soit

$$\gamma\,(q_1, q_2, z) = 0,$$

l'intégrale cherchée, nous aurons :

$$\frac{d\gamma}{dq_1} + \frac{d\gamma}{dz}\,p_1 = 0,$$
$$\frac{d\gamma}{dq_2} + \frac{d\gamma}{dz}\,p_2 = 0.$$

L'équation proposée devient alors :

$$z\left(\frac{d\gamma}{dz}\right)^2 - a\,\frac{d\gamma}{dq_1}\,\frac{d\gamma}{dq_2} = 0,$$

et nous pouvons l'écrire sous la forme suivante :

$$p_3^2 q_3 - ap_1p_2 = 0. \ (^*)$$

Cette équation aux dérivées partielles à trois variables indépendantes q_1, q_2, q_3, dans laquelle γ est la fonction inconnue, nous donne

$$p_1 = \frac{p_3^2 q_3}{ap_2}.$$

(*) Il est presque inutile de faire observer que les quantités p_1, p_2, ne sont pas les mêmes dans cette équation que dans la proposée. En outre, dans cette dernière équation, $z = q_3$ est considérée comme variable indépendante.

La fonction p_2 sera déterminée par l'équation $f_1 = a_1$, satisfaisant à la condition (70) :

$$(p_1, f_1) = 0,$$

c'est-à-dire par une solution du système

$$\frac{dq_1}{1} = \frac{dq_2}{\frac{p_3^2 q_3}{ap_2^2}} = \frac{dq_3}{-\frac{2p_3 q_3}{ap_2}} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dp_3}{\frac{p_3^2}{ap_2}}.$$

Cette solution est

$$p_2 = a_1;$$

par conséquent,

$$p_1 = \frac{p_3^2 q_3}{aa_1}.$$

La fonction p_3 se déduit de l'équation $f_2 = a_2$, satisfaisant aux deux conditions (74) :

$$(p_1, f_2) = 0, \quad (p_2, f_2) = 0.$$

La première nous donne le système :

$$\frac{dq_2}{1} = \frac{dq_3}{-\frac{2p_3 q_3}{aa_1}} = \frac{dp_3}{\frac{p_3^2}{aa_1}};$$

d'où l'on tire :

$$-\frac{dq_3}{2q_3} = \frac{dp_3}{p_3},$$

et, par suite,

$$\psi = p_3\sqrt{q_3} = \text{const.}$$

En substituant ψ à la place de f_2 dans la seconde des équations précédentes, on trouve une identité :

$$\psi_1 = (p_2, \psi) = \frac{d\psi}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_3}\frac{d\psi}{dp_3} - \frac{dp_2}{dp_3}\frac{d\psi}{dq_3} = 0.$$

La fonction p_3 est donc donnée par l'équation

$$p_3\sqrt{q_3} = a_2.$$

Nous aurons ainsi :

$$p_1 = \frac{a_2^2}{aa_1},$$

$$p_2 = a_1,$$

$$p_3 = \frac{a_2}{\sqrt{q_3}}.$$

Par conséquent,

$$d\gamma = \frac{a_2^2}{aa_1}\,dq_1 + a_1 dq_2 + \frac{a_2}{\sqrt{q_3}}\,dq_3,$$

et il vient pour l'intégrale complète de la transformée, abstraction faite de la constante,

$$\gamma = \frac{a_2^2}{aa_1}\,q_1 + a_1 q_2 + 2a_2\sqrt{q_3}.$$

En égalant cette expression à zéro, et remplaçant q_3 par z, l'intégrale complète de la proposée est (n° 19) :

$$4a_2^2 z = \left(\frac{a_2^2}{aa_1}\,q_1 + a_1 q_2\right)^2,$$

ou bien :

$$z = \frac{(a_2^2 q_1 + aa_1^2 q_2)^2}{4a_1^2 a_2^2 a^2}.$$

71. 3° Soit encore l'équation primordinale :

$$q_1^2 p_1 + q_1^2 p_2 - 2q_1 z - b\log p_2 + 2b\log q_1 = \alpha.$$

Cette équation contenant la fonction inconnue z, nous devons, comme dans le n° précédent, lui appliquer le procédé du n° 18, pour la réduire à une autre qui ne renferme pas cette fonction.

A cet effet, soit

$$\varphi(q_1, q_2, z) = 0,$$

l'intégrale cherchée. Nous aurons, en remplaçant p_1, p_2, par les valeurs (n° 18), déduites de cette dernière, et réduisant :

$$-q_1^2\left(\frac{d\varphi}{dq_1} + \frac{d\varphi}{dq_2}\right) - 2q_1 z\frac{d\varphi}{dz} - b\frac{d\varphi}{dz}\log\left(-\frac{\dfrac{d\varphi}{dq_2}}{\dfrac{d\varphi}{dz}}\right) + b\frac{d\varphi}{dz}\log q_1^2 - \alpha\frac{d\varphi}{dz} = 0.$$

Remplaçant $z, \frac{dz}{dq_1}, \frac{dz}{dq_2}, \frac{dz}{dz}$, par q_3, p_1, p_2, p_3, pour ramener cette équation à la forme normale, on a :

$$q_1^2(p_1+p_2)+2q_1q_3p_3+bp_3\log\left(-\frac{p_2}{p_3}\right)-bp_3\log q_1^2+\alpha p_3=0,$$

ou bien :

$$p_1q_1^2+p_2q_1^2+2q_1q_3p_3+bp_3\log\left(-\frac{p_2}{q_1^2p_3}\right)+\alpha p_3=0.$$

On tire de là, pour appliquer la méthode du chapitre VII,

$$p_1=\frac{-bp_3\log\left(-\frac{p_2}{q_1^2p_3}\right)-\alpha p_3-2q_1q_3p_3-q_1^2p_2}{q_1^2}.$$

Cela posé, p_2 sera une intégrale particulière du système d'équations ordinaires (n° 53) :

$$\frac{dq_1}{1}=\frac{q_1^2dq_2}{q_1^2+\frac{bp_3}{p_2}}=\frac{q_1^2dq_3}{\alpha+2q_1q_3+b\log\left(-\frac{p_2}{q_1^2p_3}\right)-b}=\frac{dp_2}{0}=\frac{q_1^2dp_3}{-2p_3q_1}.$$

Par suite,

$$p_2=-a_1,$$

est l'équation qui détermine p_2; on a alors

$$p_1=\frac{-bp_3\log\left(\frac{a_1}{p_3q_1^2}\right)-\alpha p_3-2q_1q_3p_3+a_1q_1^2}{q_1^2}.$$

Ensuite, p_3 sera une solution commune aux deux équations linéaires suivantes :

$$(p_1,f_2)=0,\quad (p_2,f_2)=0;$$

et, comme nous l'avons vu (n° 54), il faudra d'abord intégrer le système

$$\frac{dq_1}{1}=\frac{q_1^2dq_3}{\alpha+2q_1q_3+b\log\left(\frac{a_1}{q_1^2p_3}\right)-b}=\frac{q_1^2dp_3}{-2q_1p_3}.$$

Le premier et le troisième rapport nous donnent :

$$\psi = q_1^2 p_3 = \text{const};$$

en remplaçant f_2 par ψ, dans le premier membre de l'équation

$$(p_2, f_2) = 0,$$

on a, identiquement,

$$(p_2, \psi) = 0.$$

Par conséquent,

$$q_1^2 p_3 = a_2,$$

est l'équation qui détermine p_3.

On a donc :

$$p_2 = -a_1, \quad p_3 = \frac{a_2}{q_1^2},$$

$$p_1 = \frac{-\frac{ba_2}{q_1^2}\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \frac{\alpha a_2}{q_1^2} - 2q_1 q_3 \frac{a_2}{q_1^3} + a_1 q_1^2}{q_1^2},$$

et, par suite,

$$d_7 = -\frac{ba_2}{q_1^4}\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right) dq_1 - \frac{\alpha a_2}{q_1^4} dq_1 - \frac{2a_2 q_3}{q_1^3} dq_1 + a_1 dq_1 - a_1 dq_2 + \frac{a_2}{q_1^2} dq_3.$$

En intégrant cette dernière, on trouve, pour l'intégrale complète de la transformée :

$$\varphi = -\frac{ba_2 \log\left(\frac{a_1}{a_2}\right)}{3q_1^3} + \frac{\alpha a_2}{3q_1^3} + a_2\left(\frac{q_3}{q_1^2}\right) + a_1 q_1 - a_1 q_2 - \beta.$$

En faisant $\varphi = 0$, remplaçant q_3 par z, β par $\theta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)$, et $\frac{a_1}{a_2}$ par γ, on aura, pour l'intégrale complète de la proposée :

$$z = -\frac{b\log\gamma}{3q_1} - \frac{\alpha}{3q_1} - \gamma q_1^3 + \gamma q_1^2 q_2 + q_1^2 \theta(\gamma),$$

ou bien :

$$z = \gamma q_1^2 q_2 - \gamma q_1^3 - \frac{b\log\gamma + \alpha}{3q_1} + q_1^2 \theta(\gamma),$$

θ étant une fonction arbitraire. Cette intégrale a été obtenue par *Ampère* par un procédé très-différent, et beaucoup plus long que celui que nous venons d'employer (*).

VIII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS PRIMORDINALES SIMULTANÉES. — APPLICATIONS.

72. Soit d'abord un système de n équations primordinales simultanées à n variables indépendantes :

$$\left.\begin{aligned} &F_1(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ &F_2(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_n(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (91)$$

Pour que ce système soit intégrable, il faut évidemment que l'on puisse en déduire des valeurs de $p_1, p_2, \ldots p_n$, telles que l'expression

$$dz = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_n dq_n, \quad \ldots \quad (26)$$

soit une différentielle exacte, c'est-à-dire telles que l'on ait pour toutes les valeurs de i, k, égales à $1, 2, 3, \ldots n$,

$$\left(\frac{dp_i}{dq_k}\right) = \left(\frac{dp_k}{dq_i}\right).$$

Or, d'après ce que nous avons vu (n° 50), il suffit pour cela que les équations (91) vérifient la condition

$$(F_i, F_k) = 0,$$

pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots n$, de i et de k.

Si cette condition, nécessaire et suffisante, est satisfaite, les

(*) Ampère, *Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles*, Journal de l'École polytechnique, 18e cahier, p. 148.

équations (91) sont compatibles, et donnent les valeurs de p_1, $p_2, \ldots p_n$, que l'on substituera dans le second membre de l'expression (26). L'intégration de cette dernière détermine la fonction z, *intégrale commune complète* (*) des équations proposées.

73. Si, parmi les n équations (91), il en existe une ou plusieurs, qui sont des fonctions des autres, et des variables indépendantes, le problème est impossible.

Soit, par exemple,

$$F_\lambda = \varphi(q_1, q_2, \ldots q_n, F_\mu, F_\nu, \ldots) = 0;$$

nous aurons alors

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots q_n, o, o, \ldots) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

c'est-à-dire une relation entre les variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, seulement. Si cette équation (92) n'est pas identiquement nulle, il existera une relation entre les variables $q_1, q_2, \ldots q_n$, qui ne seront plus indépendantes les unes des autres, et le problème est évidemment impossible.

Si l'équation (92) se réduit à une identité, le nombre des équations proposées est moindre que celui des inconnues $p_1, p_2, \ldots p_n$, et n'est pas suffisant pour déterminer ces quantités.

74. **Remarque.** — Il est facile de s'assurer *si une ou plusieurs des fonctions* F *sont exprimées au moyen des autres.*

En effet, nous savons (n° 8, note) que, dans ce cas, le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dF_1}{dp_1} & \frac{dF_1}{dp_2} & \cdots & \frac{dF_1}{dp_n} \\ \frac{dF_2}{dp_1} & \frac{dF_2}{dp_2} & \cdots & \frac{dF_2}{dp_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{dF_n}{dp_1} & \frac{dF_n}{dp_2} & \cdots & \frac{dF_n}{dp_n} \end{vmatrix},$$

est identiquement nul.

(*) Cette dénomination est due à Bour, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre,* Journal de l'École polytechnique, 39e cahier, p. 169.

Si, au contraire, $\Delta \gtrless 0$, les fonctions F sont indépendantes les unes des autres; dans ce cas, si $(F_i, F_k) = 0$, pour les valeurs $1, 2, \ldots n$, de i, k, il y aura une solution commune.

75. Supposons maintenant que le nombre des équations simultanées soit $m < n$, et soient

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots F_m = 0, \ldots\ldots \quad (93)$$

les m équations proposées, dont il s'agit de trouver une solution commune.

Nous aurons plusieurs cas à examiner :

1^er^ cas. — Si, pour toutes les valeurs $1, 2, 3, \ldots m$, de i et k, on a identiquement

$$(F_i, F_k) = 0,$$

les équations proposées sont compatibles. On peut alors obtenir le système des n équations nécessaires pour déterminer $p_1, p_2, \ldots p_n$, en ajoutant aux m équations (93), $n - m$ autres équations déterminées par la condition que l'on ait :

$$(F_\lambda, F_\mu) = 0,$$

pour les valeurs $\lambda = 1, 2, 3, \ldots n$; $\mu = m + 1, m + 2, \ldots n$.

Ainsi, par exemple, la première fonction à déterminer, F_{m+1} sera donnée par une intégrale commune aux m équations linéaires :

$$(F_1, F_{m+1}) = 0, \quad (F_2, F_{m+1}) = 0, \ldots (F_m, F_{m+1}) = 0.$$

La fonction F_{m+2} sera une solution commune aux $m + 1$ équations linéaires suivantes :

$$(F_1, F_{m+2}) = 0, \quad (F_2, F_{m+2}) = 0, \ldots (F_m, F_{m+2}) = 0, \quad (F_{m+1}, F_{m+2}) = 0,$$

et ainsi de suite.

Les n équations nécessaires à la détermination $p_1, p_2, \ldots p_n$, sont donc :

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \ldots F_m = 0, \quad F_{m+1} = a_1, \ldots F_n = a_{n-m},$$

et l'intégrale commune cherchée contiendra, par conséquent, $n - m + 1$ constantes arbitraires.

2me cas. — Si, pour les valeurs $1, 2, \ldots m$, de i et k, on a

$$(F_i, F_k) = \text{const},$$

ou bien :

$$(F_i, F_k) = \Psi(q_1, q_2, \ldots q_n, F_1, F_2, \ldots),$$

cette dernière équation n'étant pas identiquement nulle, les équations (93) sont incompatibles, et il n'y aura pas d'intégrale commune.

3me cas. — Supposons que, pour les valeurs $1, 2, \ldots m$, de i et k, on trouve quelques équations de la forme (*) :

$$\left.\begin{aligned} (F_i, F_k) &= \xi(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (F_\lambda, F_\mu) &= \zeta(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n), \end{aligned}\right\} \quad (94)$$

qui ne s'annulent pas, en vertu des équations données. Il peut arriver alors que ces équations s'annulent en vertu des $n - m$ équations inconnues.

Si l'on pose, en effet,

$$\begin{aligned} F_{m+1} &= \xi(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ F_{m+l} &= \zeta(q_1, q_2, \ldots q_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0, \end{aligned}$$

on aura de nouvelles équations que l'on peut joindre aux proposées (93), et qui doivent aussi satisfaire à la condition

$$(F_i, F_k) = 0,$$

pour les valeurs $1, 2, 3, \ldots m + l$, de i, et $m + 1, m + 2, \ldots m + l$, de k.

Si ces conditions ne sont pas toutes vérifiées au moyen des $m + l$ premières équations, on fera la même chose que précédemment avec les fonctions $\xi, \ldots \zeta$.

On obtiendra ainsi :

(*) C'est à Bour que l'on doit, dans ce cas, la méthode d'intégration des équations simultanées, *Journal de l'École polytechnique*, 39e cahier.

1° Ou bien n équations simultanées ne satisfaisant pas aux conditions

$$(F_i, F_k) = 0,$$

pour les valeurs 1, 2, 3, ... n, de i et k, et le problème est impossible;

2° Ou bien n équations vérifiant ces conditions, et le problème sera possible : on aura alors une intégrale commune complète renfermant une seule constante arbitraire;

3° Ou bien p équations (p étant $< n$), satisfaisant aux conditions, et l'on en déterminera $n - p$ nouvelles : on aura une intégrale commune complète renfermant $n - p + 1$ constantes arbitraires;

4° Ou bien p équations (p étant $< n$), dans lesquelles une ou plusieurs des expressions F se réduiront à des constantes ou à des fonctions de $q_1, q_2, \ldots q_n$, différentes de zéro, et le problème sera impossible.

76. **Remarque I.** — Dans tous les cas où le problème est possible, on voit qu'il se ramène à l'intégration d'un système d'équations primordinales linéaires, problème dont nous nous sommes occupés ci-dessus (n^{os} 40 et suivants); ou bien, les équations à ajouter aux proposées s'obtiennent par de simples différentiations.

77. **Remarque II.** — La théorie précédente nous montre que l'intégration d'un système d'équations primordinales simultanées n'est pas toujours possible. Elles n'ont une intégrale commune complète que si elles vérifient certaines conditions. Au contraire, l'intégration d'une seule équation primordinale est toujours possible.

78. **Remarque III.** — Dans tous les cas, où l'on pourra le faire, il est avantageux d'employer la méthode exposée au chapitre VII. Nous nous dispenserons de la développer ici de nouveau : nous l'appliquerons dans les numéros suivants.

79. *Applications.* — 1° Trouver l'intégrale complète commune aux deux équations

$$F_1 = p_1 p_3 - q_2 q_4 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (95)$$

$$F_2 = p_2 p_4 - q_1 q_3 = 0. \quad \ldots\ldots \quad (96)$$

A ces deux équations nous devons en ajouter deux autres, afin de déterminer les quantités p_1, p_2, p_3, p_4, qui rendent l'expression

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3 + p_4 dq_4,$$

une différentielle exacte.

Pour cela, il faut d'abord que les équations proposées satisfassent à la condition (n° 75)

$$(F_1, F_2) = 0.$$

Mais on trouve

$$(F_1, F_2) = -p_1 q_1 + p_2 q_2 - p_3 q_3 + p_4 q_4;$$

par conséquent, (F_1, F_2) n'est pas identiquement nulle, et l'on devra (n° 75) considérer cette expression, égalée à zéro, comme une troisième équation :

$$F_3 = p_1 q_1 - p_2 q_2 + p_3 q_3 - p_4 q_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

80. *1re méthode.* — Cela posé, nous déduirons des équations (95), (96), (97), les valeurs de p_1, p_2, p_3, en fonction de p_4.

Les deux premières nous donnent :

$$p_1 = \frac{q_2 q_4}{p_3}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_3}{p_4}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

en substituant ces valeurs dans (97), on obtient une équation du second degré

$$p_3^2 - p_3 \left(\frac{q_1 q_2}{p_4} + \frac{p_4 q_4}{q_3} \right) + \frac{q_1 q_2 q_4}{q_3} = 0,$$

dont les racines sont :

$$p_3 = \frac{q_1 q_2}{p_4}, \quad p_3 = \frac{q_4 p_4}{q_3}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

Si nous prenons la seconde de ces racines, et les valeurs (98), il viendra :

$$p_1 = \frac{q_2 q_3}{p_4}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_3}{p_4}, \quad p_3 = \frac{p_4 q_4}{q_3}. \quad . \quad . \quad . \quad (100)$$

L'équation $f = 0$, qui donne la valeur de p_4, sera une intégrale commune aux trois équations (n° 62) :

$$(p_1, f) = 0, \quad (p_2, f) = 0, \quad (p_3, f) = 0,$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dq_1} + \frac{dp_1}{dq_4}\frac{df}{dp_4} - \frac{dp_1}{dp_4}\frac{df}{dq_4} = 0, \\ \frac{df}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_4}\frac{df}{dp_4} - \frac{dp_2}{dp_4}\frac{df}{dq_4} = 0, \\ \frac{df}{dq_3} + \frac{dp_3}{dq_4}\frac{df}{dp_4} - \frac{dp_3}{dp_4}\frac{df}{dq_4} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

Pour trouver cette solution commune, nous commencerons par déterminer une intégrale particulière de la troisième équation (101), ou une intégrale du système ordinaire :

$$\frac{dq_3}{1} = \frac{dq_4}{-\frac{q_4}{q_3}} = \frac{dp_4}{\frac{p_4}{q_3}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (102)$$

Le premier et le troisième rapport nous donnent :

$$\frac{dq_3}{q_3} = \frac{dp_4}{p_4},$$

ou bien :

$$\psi = \frac{p_4}{q_3} = \alpha.$$

En remplaçant f par ψ dans les deux premières équations (101), on trouve des identités. Par conséquent, $f = \frac{p_4}{q_3} = \alpha$, sera une intégrale commune à ces trois équations.

Nous en déduisons, ainsi que des équations (100),

$$p_4 = \alpha q_3, \quad p_1 = \frac{q_2}{\alpha}, \quad p_2 = \frac{q_1}{\alpha}, \quad p_3 = \alpha q_4.$$

On a donc

$$dz = \frac{q_2}{\alpha} dq_1 + \frac{q_1}{\alpha} dq_2 + \alpha q_4 dq_3 + \alpha q_3 dq_4;$$

par suite,

$$z = \frac{1}{\alpha} q_1 q_2 + \alpha q_3 q_4 + \xi(\alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

sera l'intégrale commune cherchée.

La première valeur (99)

$$p_3 = \frac{q_1 q_2}{p_4},$$

nous donnera une intégrale semblable.

On en déduira :

$$p_1 = \frac{p_4 q_4}{q_1}, \quad p_2 = \frac{q_1 q_3}{p_4}, \quad p_3 = \frac{q_1 q_2}{p_4}.$$

Les mêmes opérations conduisent à chercher une intégrale commune aux trois équations linéaires suivantes :

$$(p_1, f_1) = 0, \quad (p_2, f_1) = 0, \quad (p_3, f_1) = 0,$$

desquelles on tire :

$$f_1 = \frac{p_4}{q_1} = \alpha_1.$$

On a donc

$$dz = \alpha_1 q_4 dq_1 + \alpha_1 q_1 dq_4 + \frac{1}{\alpha_1} q_3 dq_2 + \frac{1}{\alpha_1} q_2 dq_3,$$

et l'expression

$$z = \alpha_1 q_1 q_4 + \frac{1}{\alpha_1} q_2 q_3 + \xi_1(\alpha_1), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (104)$$

est une seconde intégrale commune complète des proposées.

On pouvait d'ailleurs la former au moyen de la précédente (103), par une permutation tournante.

81. **Remarque I.** — On peut trouver une autre intégrale commune aux équations (101).

En effet, nous avons vu que $p_4 = \alpha q_3$ est une intégrale particulière. Or, le premier et le deuxième rapport (102) nous donnent :

$$\frac{dq_3}{q_3} + \frac{dq_4}{q_4} = 0,$$

ou bien :

$$q_3 q_4 = \text{const.}$$

Par conséquent, l'équation

$$\psi = p_4 - q_3\varphi(q_3, q_4) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

est l'intégrale générale de la troisième équation (101). Nous déterminerons la fonction φ, de telle manière que l'expression (105) soit une intégrale commune. Nous remarquerons d'abord que cette fonction φ peut contenir q_1, q_2, d'une manière quelconque; mais q_3, q_4, y entrent seulement en produit.

Si nous remplaçons f par ψ dans l'une des deux premières équations (101), par exemple dans la première, il vient, en substituant, dans l'expression de φ, v au lieu de q_3q_4 :

$$-q_3\frac{d\varphi}{dq_1} - \frac{q_2q_3}{p_4^2}q_3^2\frac{d\varphi}{dv} = 0,$$

ou bien :

$$\frac{d\varphi}{dq_1} + \frac{q_2}{\varphi^2}\frac{d\varphi}{dv} = 0.$$

La fonction φ sera donc déterminée par l'intégration du système :

$$\frac{dq_1}{\varphi^2} = \frac{dv}{q_2} = \frac{d\varphi}{0},$$

q_2 étant considérée comme une constante. On en déduit :

$$\varphi = \text{const}, \quad q_2q_1 = \varphi^2 v + \gamma;$$

donc,

$$\varphi = \sqrt{\frac{q_1q_2 - \gamma}{q_3q_4}}.$$

Par conséquent, l'équation

$$\psi = p_4 - q_3\sqrt{\frac{q_1q_2 - \gamma}{q_3q_4}} = 0,$$

est une intégrale commune à la première et à la troisième équation (101).

Si maintenant, nous remplaçons f par ψ dans la deuxième équation (101), on a une identité. Donc,

$$f = p_4 - q_3\sqrt{\frac{q_1q_2 - \gamma}{q_3q_4}} = 0,$$

est l'équation qu'il faut joindre aux équations (100) pour résoudre le problème. On obtient ainsi :

$$p_1 = q_2\sqrt{\frac{q_3q_4}{q_1q_2-\gamma}}, \quad p_2 = q_1\sqrt{\frac{q_3q_4}{q_1q_2-\gamma}},$$

$$p_3 = q_4\sqrt{\frac{q_1q_2-\gamma}{q_3q_4}}, \quad p_4 = q_3\sqrt{\frac{q_1q_2-\gamma}{q_3q_4}}.$$

On en tire :

$$dz = q_2dq_1\sqrt{\frac{q_3q_4}{q_1q_2-\gamma}} + q_1dq_2\sqrt{\frac{q_3q_4}{q_1q_2-\gamma}}$$
$$+ q_4dq_3\sqrt{\frac{q_1q_2-\gamma}{q_3q_4}} + q_3dq_4\sqrt{\frac{q_1q_2-\gamma}{q_3q_4}};$$

par conséquent, l'équation

$$z = 2\sqrt{q_1q_2-\gamma}\sqrt{q_3q_4} + \chi(\gamma),$$

sera l'intégrale complète cherchée.

Le second système de valeurs donnera de la même manière l'intégrale

$$z = 2\sqrt{q_3q_4-\beta}.\sqrt{q_1q_2} + \xi(\beta).$$

82. **Remarque II.** — On déduit sans peine l'intégrale générale commune, en éliminant la constante arbitraire entre une intégrale complète, et sa dérivée par rapport à cette constante.

83. *2me méthode.* — On détermine encore, comme précédemment, les valeurs de p_1, p_2, p_3, en fonction de p_4 seulement. On calcule p_4, par la condition que l'expression

$$p_1dq_1 + p_2dq_2 + p_3dq_3 + p_4dq_4,$$

soit une différentielle exacte, c'est-à-dire que, dans le premier cas,

$$dz = \frac{q_2q_3}{p_4}dq_1 + \frac{q_1q_3}{p_4}dq_2 + \frac{p_4q_4}{q_3}dq_3 + p_4dq_4,$$

et, dans le second cas,

$$dz = \frac{p_4q_4}{q_1}dq_1 + \frac{q_1q_3}{p_4}dq_2 + \frac{q_1q_2}{p_4}dq_3 + p_4dq_4,$$

soient des différentielles exactes.

Dans la première hypothèse, il faut que les six équations suivantes soient compatibles (*) :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_4}{dq_1} &= -\frac{q_2q_3}{p_4^2}\frac{dp_4}{dq_4},\\
\frac{dp_4}{dq_2} &= -\frac{q_1q_3}{p_4^2}\frac{dp_4}{dq_4},\\
\frac{dp_4}{dq_3} &= \frac{p_4}{q_3}+\frac{q_4}{q_3}\frac{dp_4}{dq_4},
\end{aligned}\right|\qquad
\left.\begin{aligned}
\frac{q_3}{p_4}-\frac{q_2q_3}{p_4^2}\frac{dp_4}{dq_2} &= \frac{q_3}{p_4}-\frac{q_1q_3}{p_4^2}\frac{dp_4}{dq_1},\\
\frac{q_2}{p_4}-\frac{q_2q_3}{p_4^2}\frac{dp_4}{dq_3} &= \frac{q_4}{q_3}\frac{dp_4}{dq_1},\\
\frac{q_1}{p_4}-\frac{q_1q_3}{p_4^2}\frac{dp_4}{dq_3} &= \frac{q_4}{q_3}\frac{dp_4}{dq_2},
\end{aligned}\right.$$

Or, ces six équations rentrent les unes dans les autres : ainsi, la quatrième

$$q_2\frac{dp_4}{dq_2} = q_1\frac{dp_4}{dq_1},$$

se déduit de la deuxième, multipliée par q_2, et de la première, multipliée par q_1; en remplaçant $\frac{dp_4}{dq_3}$, dans la cinquième et la sixième, on obtient la première et la seconde.

Il suffit donc de considérer trois quelconques de ces équations pour en déduire l'expression de p_4. Nous prendrons la quatrième, la troisième et la première :

$$\left.\begin{aligned}
q_2\frac{dp_4}{dq_2}-q_1\frac{dp_4}{dq_1} &= 0,\\
q_3\frac{dp_4}{dq_3}-q_4\frac{dp_4}{dq_4} &= p_4,\\
\frac{dp_4}{dq_1} &= -\frac{q_2q_3}{p_4^2}\frac{dp_4}{dq_4}.
\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(106)$$

La première de ces équations a pour intégrale générale :

$$p_4 = \varphi(q_1q_2),$$

c'est-à-dire que p_4 peut, jusqu'ici, dépendre d'une manière quelconque de q_3, q_4 : mais, elle ne contient q_1, q_2, qu'en produit.

(*) Ces six équations expriment les conditions ordinaires d'intégrabilité d'une différentielle totale.

La deuxième nous donne pour intégrale générale :

$$p_4 = q_3 \psi (q_3 q_4).$$

Par conséquent, pour satisfaire à ces deux équations, il faut poser

$$p_4 = q_3 \zeta (q_1 q_2, q_3 q_4).$$

La fonction ζ sera déterminée par la condition que cette valeur de p_4 doit satisfaire à la troisième équation (106).

En posant

$$q_1 q_2 = u, \quad q_3 q_4 = v,$$

on a :

$$p_4 = q_3 \zeta (u, v).$$

Si l'on substitue p_4 dans la troisième équation (106), il vient :

$$q_3 \frac{d\zeta}{du} \cdot q_2 = - \frac{q_2 q_3}{p_4^2} q_3 \frac{d\zeta}{dv} \cdot q_3,$$

puisque

$$\frac{du}{dq_1} = q_2, \qquad \frac{dv}{dq_4} = q_3.$$

On a donc :

$$\frac{d\zeta}{du} = - \frac{q_3^2}{p_4^2} \frac{d\zeta}{dv} = - \frac{1}{\zeta^2} \frac{d\zeta}{dv},$$

ou bien :

$$\zeta^2 \frac{d\zeta}{du} + \frac{d\zeta}{dv} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (107)$$

De cette dernière, on tire l'intégrale particulière :

$$\sqrt{\frac{u - \beta}{v}} = \zeta.$$

Par suite, l'équation

$$p_4 = q_3 \sqrt{\frac{q_1 q_2 - \gamma}{q_3 q_4}},$$

est une solution particulière du problème, et l'on continuera comme dans la première méthode. On a ainsi :

$$z = 2 \sqrt{q_3 q_4} \sqrt{q_1 q_2 - \gamma} + \chi (\gamma).$$

Une autre solution de (107) est $\zeta = \alpha$; d'où $p_4 = \alpha q_3$, et la question se terminera encore comme dans la première méthode. On trouve alors :

$$z = \alpha q_3 q_4 + \frac{1}{\alpha} q_1 q_2 + \xi(\alpha).$$

84. 2° Soient encore les deux équations simultanées :

$$\left.\begin{aligned} &F_1 = 2q_3 p_4 + q_1^2 p_3 = 0, \\ &F_2 = q_1^2 p_1 - 2q_3 p_2 + (q_1^2 q_4 - 2q_3)\, p_3 - 2q_1 q_4 p_4 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (108)$$

dont il s'agit de trouver une intégrale commune complète.

A ces deux équations, il faut en ajouter trois autres, afin de pouvoir déterminer les quantités p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, qui rendent l'expression

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3 + p_4 dq_4 + p_5 dq_5,$$

une différentielle exacte.

Les deux proposées doivent d'abord, comme on sait, satisfaire à la condition

$$(F_1, F_2) = 0.$$

Or, on trouve

$$F_3 = (F_1, F_2) = p_2 + p_3 - q_3 p_3.$$

Par conséquent, F_3 n'est pas identiquement nulle, et l'on devra considérer cette expression, égalée à zéro, comme une troisième équation :

$$F_3 = p_2 + p_3 - q_3 p_3 = 0.$$

De même, les fonctions F_1, F_2, F_3, devant satisfaire aux conditions

$$(F_1, F_3) = 0, \quad (F_2, F_3) = 0,$$

on en déduira, puisque l'on a :

$$F_4 = (F_1, F_3) = q_1^2 p_3, \quad F_5 = (F_2, F_3) = 0,$$

une quatrième équation

$$p_3 = 0.$$

Il en résulte que l'on a maintenant les quatre équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 2p_4q_5 + q_1^2p_5 &= 0, \\ q_1p_1 - 2q_4p_4 &= 0, \\ p_2 &= 0, \\ p_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

On en tire :

$$p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = -\frac{q_1^2p_5}{2q_5}, \quad p_1 = -\frac{q_1q_4p_5}{q_5}.$$

Quant à la cinquième équation $f = 0$, qui doit donner p_5, elle sera une intégrale commune aux quatre équations :

$$(p_1, f) = 0, \quad (p_2, f) = 0, \quad (p_3, f) = 0, \quad (p_4, f) = 0,$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dq_1} + \frac{dp_1}{dq_5}\frac{df}{dp_5} - \frac{dp_1}{dp_5}\frac{df}{dq_5} &= 0, \\ \frac{df}{dq_2} + \frac{dp_2}{dq_5}\frac{df}{dp_5} - \frac{dp_2}{dp_5}\frac{df}{dq_5} &= 0, \\ \frac{df}{dq_3} + \frac{dp_3}{dq_5}\frac{df}{dp_5} - \frac{dp_3}{dp_5}\frac{df}{dq_5} &= 0, \\ \frac{df}{dq_4} + \frac{dp_4}{dq_5}\frac{df}{dp_5} - \frac{dp_4}{dp_5}\frac{df}{dq_5} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (109)$$

Pour trouver cette intégrale commune, nous commencerons par chercher une solution particulière de la première de ces équations, ou une intégrale du système ordinaire :

$$\frac{dq_1}{1} = \frac{dq_5}{\frac{q_1q_4}{q_5}} = \frac{dp_5}{\frac{q_1q_4p_5}{q_5^2}}.$$

Le deuxième et le troisième rapport nous donnent :

$$\psi = \frac{p_5}{q_5} = \alpha,$$

et, en remplaçant f par ψ dans les trois dernières équations (109), on obtient des identités. Donc, l'expression

$$f = \frac{p_3}{q_3} = \alpha,$$

est l'intégrale commune aux quatre équations (109).

On a alors :

$$p_1 = -\alpha q_1 q_4, \quad p_2 = 0, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = -\frac{\alpha q_1^2}{2}, \quad p_5 = \alpha q_3;$$

d'où

$$dz = -\alpha q_1 q_4 dq_1 - \frac{\alpha q_1^2}{2} dq_4 + \alpha q_3 dq_3.$$

L'intégrale commune aux équations (108) est donc la suivante :

$$z = -\frac{\alpha q_1^2 q_4}{2} + \frac{\alpha q_3^2}{2} + \xi(\alpha).$$

85. 3° Soient encore les deux équations simultanées :

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= p_1 + (q_4 + q_1 q_2 + q_1 q_3)\, p_3 + (q_2 + q_3 - 3q_1)\, p_4 = 0, \\ F_2 &= p_2 + (q_1 q_3 q_4 + q_2 - q_1 q_2)\, p_3 + (q_3 q_4 - q_2)\, p_4 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

dont nous nous proposons de trouver une intégrale commune complète.

Nous devons joindre aux équations (110) deux équations nouvelles, afin de pouvoir déterminer les quantités p_1, p_2, p_3, p_4, telles que l'expression

$$p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + p_3 dq_3 + p_4 dq_4,$$

soit une différentielle exacte.

Or, la condition (n° 75) que les deux proposées satisfassent à la relation

$$(F_1, F_2) = 0,$$

nous donne

$$(p_4 + q_1 p_3)(1 + q_2 - q_1 q_2 - q_4^2 - q_3^2 - q_2 q_3 - q_1 q_2 q_4 + 3 q_1 q_3) = 0.$$

La troisième équation sera donc

$$F_3 = p_4 + q_1 p_3 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Toutes les autres relations $(F_i, F_k) = 0$ sont alors vérifiées : par conséquent, la solution commune existe.

Cela posé, en résolvant les trois équations (110) et (111) :

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0,$$

par rapport à p_1, p_2, p_3, on trouve :

$$p_1 = \frac{p_4(q_4 + 3q_1^2)}{q_1}, \quad p_2 = \frac{p_4 q_2}{q_1}, \quad p_3 = -\frac{p_4}{q_1}.$$

L'équation $f = 0$, qui doit donner p_4, sera (n° 62) une intégrale commune aux trois équations simultanées

$$(p_1, f) = 0, \quad (p_2, f) = 0, \quad (p_3, f) = 0,$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned} \frac{df}{dq_1} + \frac{df}{dp_4}\frac{dp_1}{dq_4} - \frac{df}{dq_4}\frac{dp_1}{dp_4} &= 0, \\ \frac{df}{dq_2} + \frac{df}{dp_4}\frac{dp_2}{dq_4} - \frac{df}{dq_4}\frac{dp_2}{dp_4} &= 0, \\ \frac{df}{dq_3} + \frac{df}{dp_4}\frac{dp_3}{dq_4} - \frac{df}{dq_4}\frac{dp_3}{dp_4} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (112)$$

Pour trouver cette solution commune, nous aurons à chercher une intégrale particulière du système ordinaire suivant :

$$\frac{dq_3}{1} = \frac{dq_4}{-\frac{1}{q_1}} = \frac{dp_4}{0},$$

lequel nous donne :

$$\psi = p_4 = \text{const.}$$

Remplaçant f par ψ dans la deuxième équation (112), on a une identité : par conséquent, $\psi = p_4 = \text{const}$, est une solution commune aux deux dernières équations (112).

En substituant ψ dans la première, il vient :

$$\psi_1 = \frac{dp_1}{dq_4} = \frac{p_4}{q_1} = \frac{\psi}{q_1}.$$

Or, ψ_1 étant exprimée au moyen de ψ, cette dernière sera (n° 56) l'intégrale de l'équation

$$\frac{d\psi}{dq_1} - \frac{\psi}{q_1} = 0;$$

on en déduit :

$$\psi = \alpha q_1.$$

Par suite,

$$p_4 = aq_1,$$

est la quatrième équation entre les quantités p_1, p_2, p_3, p_4. Nous avons alors

$$p_1 = \alpha (q_4 + 3q_1^2), \quad p_2 = \alpha q_2, \quad p_3 = -\alpha, \quad p_4 = \alpha q_1,$$

et

$$dz = \alpha (q_4 + 3q_1^2)\, dq_1 + \alpha q_2 dq_2 - \alpha dq_3 + \alpha q_1 dq_4.$$

L'intégrale commune aux équations (110) est donc :

$$z = \alpha q_1 q_4 + \alpha q_1^3 + \frac{\alpha q_2^2}{2} - \alpha q_3 + \xi(\alpha).$$

DEUXIÈME PARTIE.

DES ÉQUATIONS BIORDINALES.

I.

DÉFINITIONS. — DIVERSES ESPÈCES D'INTÉGRALES D'UNE ÉQUATION BIORDINALE.

1. Une équation aux dérivées partielles est du second ordre, lorsqu'elle renferme les dérivées partielles du second ordre de la fonction inconnue, cette fonction et ses dérivées partielles du premier ordre pouvant d'ailleurs se trouver dans l'équation. Nous lui donnerons le nom d'*équation biordinale*.

D'après cela, la forme la plus générale d'une équation biordinale à trois variables est :

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} dz &= p\,dx + q\,dy, \\ dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \\ d^2z &= r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

2. Intégrer l'équation (1), c'est trouver la valeur la plus générale de z, telle qu'en la substituant, ainsi que ses dérivées partielles dans l'équation (1), celle-ci devienne une identité. Cette fonction inconnue est l'*intégrale générale* de la proposée. Elle doit renfermer deux fonctions arbitraires des variables indépendantes.

3. Nous distinguerons quatre classes de solutions d'une équation biordinale :

1° *L'intégrale générale ou primitive :* c'est une relation entre les variables x, y, z, et des constantes, relation satisfaisant à l'équation proposée, et renfermant deux fonctions arbitraires;

2° *Les intégrales premières ou intermédiaires :* ce sont des équations primordinales satisfaisant à l'équation proposée, et dont on peut déduire l'intégrale primitive par la méthode que nous avons exposée dans la première partie;

3° *Les solutions singulières ou intégrales particulières :* ce sont des relations dont on ne peut déduire l'intégrale générale. Souvent ce sont des équations finies ne renfermant pas deux fonctions arbitraires;

4° *Les intégrales partielles :* ce sont des solutions analogues aux intégrales complètes des équations primordinales, et dont on peut déduire l'intégrale générale par la méthode de la variation des constantes arbitraires.

II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS BIORDINALES LINÉAIRES NE RENFERMANT QUE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES. — APPLICATIONS.

4. Une équation *biordinale* est *linéaire*, lorsqu'elle renferme les dérivées r, s, t, seulement au premier degré, les quantités x, y, z, p, q, pouvant d'ailleurs y entrer d'une manière quelconque. Nous nous occuperons d'abord des équations de cette espèce, en commençant par les cas les plus simples.

5. L'équation biordinale la plus simple est

$$r = X, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

X étant une fonction de x seulement. Elle donne :

$$\frac{dz}{dx} = \int X dx + \varphi(y),$$

en remplaçant la constante par $\varphi(y)$, puisque, dans l'intégration, y a été considérée comme constante.

On a ensuite :

$$z = \int dx \int X dx + x\varphi(y) + \psi(y).$$

De même, de l'équation

$$t = Y, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dans laquelle Y est une fonction de y seulement, on déduit :

$$z = \int dy \int Y dy + y\varphi(x) + \psi(x).$$

On trouve aussi, en posant d'abord $\frac{dz}{dx} = p$, que l'équation

$$s = c, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

dans laquelle c est une constante, a pour intégrale

$$z = cxy + \int \varphi(x)\, dx + \psi(y),$$

ou, en remplaçant par $\theta(x)$ l'intégrale $\int \varphi(x)\, dx$,

$$z = cxy + \theta(x) + \psi(y).$$

De même, de l'équation

$$r = f(x, y), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

on tire

$$z = \int dx \int f(x, y)\, dy + \varphi(x) + \psi(y),$$

où l'intégrale $\int f(x, y)\, dy$ doit être prise en supposant x constante.

L'équation

$$r + Mp = N, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

dans laquelle M, N, sont des fonctions de x, y, nous donne :

$$\frac{dp}{dx} + Mp = N;$$

par suite,

$$p = e^{-\int M dx}\left[\int e^{\int M dx} N dx + \varphi(y)\right],$$

et

$$z = \int dx e^{-\int M dx} \left[\int e^{\int M dx} N dx + \varphi(y) \right] + \psi(y).$$

De même, de l'équation

$$t + Mq = N, \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

on déduit :

$$z = \int dy e^{-\int M dy} \left[\int e^{\int M dy} N dy + \varphi(x) \right] + \psi(x).$$

Enfin, de l'équation

$$s + Mp = N, \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

on conclut de la même manière :

$$z = \int dx e^{-\int M dy} \left[\int e^{\int M dy} N dy + \varphi(x) \right] + \psi(x);$$

de l'équation

$$s + Mq = N. \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

on tire :

$$z = \int dy e^{-\int M dx} \left[\int e^{\int M dx} N dx + \varphi(y) \right] + \psi(x).$$

6. Considérons maintenant l'équation linéaire suivante :

$$Rr + Ss + Tt = U, \ (*). \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

R, S, T, U étant des fonctions quelconques de x, y, z, p, q.

Cette équation n'exprimant qu'une seule relation entre r, s, t, ne peut pas servir à déterminer ces trois quantités en fonction de x, y, z, p, q.

Nous désignerons par

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

une intégrale première de la proposée : ce sera une équation primordinale, de laquelle on pourra déduire l'intégrale générale ou primitive

$$F(x, y, z) = 0.$$

(*) Quoique les équations de cette forme puissent toujours être traitées par la méthode d'Ampère, je crois cependant qu'il est bon de les considérer à part.

7. Cela posé, les équations

$$\left.\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

nous permettront de déterminer r et t en fonction de s, et, en substituant ces valeurs dans (11), il viendra :

$$\mathrm{R}\,dp\,dy + \mathrm{T}\,dq\,dx - \mathrm{U}\,dx\,dy = s\,(\mathrm{R}\,dy^2 - \mathrm{S}\,dx\,dy + \mathrm{T}\,dx^2). \quad (13)$$

En opérant, comme on le fait pour les équations linéaires du premier ordre, nous pourrons séparer cette dernière équation en deux autres (*) :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{R}\,dy^2 - \mathrm{S}\,dx\,dy + \mathrm{T}\,dx^2 &= 0, \\ \mathrm{R}\,dp\,dy + \mathrm{T}\,dq\,dx - \mathrm{U}\,dx\,dy &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

Il est évident que, si ces deux équations sont satisfaites identiquement, il en sera de même de l'équation (13).

8. La première de ces équations (14) étant du second degré, donnera deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, lesquelles seront les racines de l'équation

$$\mathrm{R}m^2 - \mathrm{S}m + \mathrm{T} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

En désignant par m' et m'' ces racines, on obtient :

$$dy = m'dx, \quad dy = m''dx.$$

Si l'on remplace dy par ces deux valeurs dans la seconde équation (14), le problème sera ramené à l'intégration des deux systèmes suivants :

$$\left.\begin{aligned} dy &= m'dx, \\ \mathrm{R}m'dp + \mathrm{T}dq - \mathrm{U}m'dx &= 0, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} dy &= m''dx, \\ \mathrm{R}m''dp + \mathrm{T}dq - \mathrm{U}m''dx &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

(*) C'est Monge, qui a été conduit le premier, par l'analogie avec les équations du premier ordre, à transformer le problème de cette manière. *Mémoires de l'Académie des sciences de Paris*, 1784, p. 128.

On en déduit par l'intégration :

$$f_1 = a, \quad f_2 = b,$$
$$f_3 = a', \quad f_4 = b';$$

par conséquent, comme nous le démontrerons plus loin (n° 10), les deux équations :

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= \varphi(f_2), \\ f_3 &= \psi(f_4), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

seront les deux intégrales premières de la proposée, φ, ψ désignant des fonctions arbitraires.

9. Cela admis, si l'on résout ces équations (18) par rapport à p, q, et si l'on substitue ces valeurs dans l'expression

$$dz = pdx + qdy, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

laquelle est une différentielle exacte, on trouvera, en intégrant cette dernière, l'intégrale primitive de la proposée.

10. Démontrons maintenant que si

$$f_1 = a, \quad f_2 = b, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

sont deux intégrales du système (16), ou du système (17), l'équation $f_1 = \varphi(f_2)$ sera une intégrale de la proposée.

Les équations (20) différentiées donnent :

$$\frac{df_1}{dx}dx + \frac{df_1}{dy}dy + \frac{df_1}{dz}dz + \frac{df_1}{dp}dp + \frac{df_1}{dq}dq = 0,$$
$$\frac{df_2}{dx}dx + \frac{df_2}{dy}dy + \frac{df_2}{dz}dz + \frac{df_2}{dp}dp + \frac{df_2}{dq}dq = 0;$$

remplaçant dy, dq, dz, par leurs valeurs déduites de (12), (16) et (19), il vient :

$$\left(\frac{df_1}{dx} + m'\frac{df_1}{dy} + (p + qm')\frac{df_1}{dz} + \frac{\mathrm{U}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_1}{dq}\right)dx + \left(\frac{df_1}{dp} - \frac{\mathrm{R}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_1}{dq}\right)dp = 0,$$
$$\left(\frac{df_2}{dx} + m'\frac{df_2}{dy} + (p + qm')\frac{df_2}{dz} + \frac{\mathrm{U}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_2}{dq}\right)dx + \left(\frac{df_2}{dp} - \frac{\mathrm{R}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_2}{dq}\right)dp = 0.$$

Ces équations devant être vérifiées, quelles que soient dx et dp, nous aurons :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df_1}{dx}+m'\frac{df_1}{dy}+(p+qm')\frac{df_1}{dz}+\frac{\mathrm{U}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_1}{dq}=0,\\
&\frac{df_1}{dp}-\frac{\mathrm{R}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_1}{dq}=0,\\
&\frac{df_2}{dx}+m'\frac{df_2}{dy}+(p+qm')\frac{df_2}{dz}+\frac{\mathrm{U}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_2}{dq}=0,\\
&\frac{df_2}{dp}-\frac{\mathrm{R}m'}{\mathrm{T}}\frac{df_2}{dq}=0.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (20^{\text{bis}})$$

Mais l'équation $f_1=\varphi(f_2)$, nous donne :

$$\frac{df_1}{dx}dx+\frac{df_1}{dy}dy+\frac{df_1}{dz}dz+\frac{df_1}{dp}dp+\frac{df_1}{dq}dq=$$
$$=\varphi'(f_2)\left[\frac{df_2}{dx}dx+\frac{df_2}{dy}dy+\frac{df_2}{dz}dz+\frac{df_2}{dp}dp+\frac{df_2}{dq}dq\right].$$

Remplaçant $\frac{df_1}{dx},\frac{df_2}{dx},\frac{df_1}{dp},\frac{df_2}{dp}$ et dz, par les valeurs déduites des équations (20^{bis}) et (19), on trouve :

$$\left(\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dz}q\right)(dy-m'dx)+\frac{1}{\mathrm{T}}\frac{df_1}{dq}(\mathrm{R}m'dp+\mathrm{T}dq-\mathrm{U}m'dx)=$$
$$\varphi'(f_2)\left[\left(\frac{df_2}{dy}+\frac{df_2}{dz}q\right)(dy-m'dx)+\frac{1}{\mathrm{T}}\frac{df_2}{dq}(\mathrm{R}m'dp+\mathrm{T}dq-\mathrm{U}m'dx)\right].$$

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathrm{R}m'dp+\mathrm{T}dq-\mathrm{U}m'dx=\mathrm{K}(dy-m'dx), \quad . \quad . \quad (21)$$

en posant

$$\mathrm{K}=-\frac{\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dz}q-\varphi'(f_2)\left(\frac{df_2}{dy}+\frac{df_2}{dz}q\right)}{\frac{1}{\mathrm{T}}\left(\frac{df_1}{dq}-\varphi'(f_2)\frac{df_2}{dq}\right)};$$

K sera une fonction de $\varphi'(f_2)$, par conséquent elle est indéterminée.

11. On conclut de là le théorème de *Monge* :

Théorème. — *Si* $f_1 = a$, $f_2 = b$, *sont deux intégrales satisfaisant aux équations*

$$\left.\begin{aligned} dy - m'dx &= 0, \\ Rm'dp + Tdq - Um'dx &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

l'équation

$$f_1 = \varphi(f_2),$$

sera une intégrale de la proposée (11).

Le système (17) donnera de la même manière une deuxième intégrale de (11).

12. Remarque. — Il est d'ailleurs facile de voir que, si l'on remplace dans (21) dp et dq par leurs valeurs (12), et si l'on égale à zéro les coefficients de dx et de dy, il vient :

$$\begin{aligned} Rm'r + Ts - Um' + Km' &= 0, \\ Rm's + Tt - K &= 0. \end{aligned}$$

Éliminant K entre ces deux dernières, on a :

$$Rm'r + Rm'^2s + Ts - Um' + Tm't = 0,$$

ou, en vertu de (15),

$$m'(Rr + Ss + Tt - U) = 0.$$

13. *Cas particuliers* (*). — 1° Lorsque $R = 0$, l'équation (11) devient :

$$Ss + Tt = U. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Dans ce cas, l'équation (15) qui donne, en général,

$$m = \frac{S \pm \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

(*) Ces cas particuliers n'ont pas été examinés par Monge, ni par aucun géomètre que je sache. Quoique les équations qui y correspondent puissent être traitées par d'autres méthodes, il est cependant très-utile de montrer comment on peut éviter les résultats illusoires que donne alors le procédé de Monge.

se réduit à la suivante :

$$Sm - T = 0,$$

d'où

$$m = \frac{T}{S}.$$

Cette première valeur de m, nous donne pour les équations (16),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{T}{S}, \quad Tdq - Udy = 0 \ldots\ldots (24)$$

Quant à la seconde valeur de m, elle est, comme on sait, infinie, et conduit à des résultats illusoires.

Mais il est alors possible de transformer les équations (17) comme nous allons le montrer.

A cet effet, observons d'abord que pour $m = \infty$, on a :

$$\frac{1}{m} = \frac{dx}{dy} = 0, \quad \text{ou} \quad dx = 0.$$

En outre, de l'équation (23), on tire en général, dans le second cas,

$$Rm = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2},$$

et, pour $R = 0$, on a $\lim Rm = S$.

Le système (17) devient ainsi :

$$dx = 0, \quad Sdp + Tdq - Udy = 0. \ldots (25)$$

14. 2° Lorsque $T = 0$, l'équation (11) devient :

$$Rr + Ss = U. \ldots\ldots (26)$$

L'équation (15) nous donne alors :

$$m = 0, \quad m = \frac{S}{R}.$$

De la valeur $m = \frac{S}{R}$, on déduit :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S}{R}, \quad Sdp - Udy = 0. \ldots\ldots (27)$$

La valeur $m = 0$ donne

$$dy = 0,$$

et la seconde équation (17) est illusoire : mais, dans ce cas, de la valeur

$$m = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R},$$

on tire :

$$\frac{T}{m} = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4RT}}{2}.$$

En faisant $T = 0$, on a :

$$\lim \frac{T}{m} = S.$$

Le système (17) devient alors :

$$dy = 0, \quad Rdp + Sdq - Udx = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

15. 3° Lorsque $R = 0$, $T = 0$, l'équation (11) se réduit à la suivante :

$$Ss = U. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

Les deux systèmes (16) et (17) compris dans (14) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} dx = 0, \quad Sdp - Udy = 0, \\ dy = 0, \quad Sdq - Udx = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

16. **Remarque.** — On pourrait d'ailleurs trouver ces deux relations, ainsi que les précédentes, en remplaçant s par sa valeur tirée des équations (12).

En effet, de la première on tire :

$$s = \frac{dp - rdx}{dy}.$$

Cette valeur, substituée dans (29), nous donne :

$$Sdp - Srdx = Udy;$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} Sdp - Udy = 0, \\ dx = 0. \end{aligned}\right\}$$

La seconde équation (12) donne :

$$s = \frac{dq - tdy}{dx};$$

d'où

$$\mathrm{S}dq - \mathrm{S}tdy = \mathrm{U}dx.$$

Par suite,

$$\left.\begin{aligned} dy &= 0, \\ \mathrm{S}dq - \mathrm{U}dx &= 0. \end{aligned}\right\}$$

17. *Applications.* — 1° Soit l'équation biordinale suivante :

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

L'équation (15) est

$$x^2m^2 - 2xym + y^2 = 0;$$

par suite,

$$m' = m'' = \frac{y}{x}.$$

Le système (16) devient dans ce cas :

$$\left.\begin{aligned} dy &= \frac{y}{x}\,dx, \\ xydp + y^2dq &= 0, \end{aligned}\right\}$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned} xdy - ydx &= 0, \\ xdp + ydq &= 0. \end{aligned}\right\}$$

De la première équation on tire :

$$\frac{y}{x} = \alpha,$$

et, en substituant y dans la seconde,

$$dp + \alpha dq = 0;$$

d'où

$$p + \alpha q = \beta.$$

Par conséquent, en posant $\beta = \varphi(\alpha)$, et remplaçant α par $\frac{y}{x}$, on trouve pour l'intégrale première

$$p + \frac{qy}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

ou

$$px + qy = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Or, cette équation primordinale linéaire s'intègre facilement d'après ce que nous avons vu dans la première partie. On en déduit :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)},$$

ou bien :

$$xdy - ydx = 0,$$

$$dz = dx \cdot \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ces deux dernières équations donnent

$$\frac{y}{x} = \alpha',$$

$$z = x\varphi(\alpha') + \beta'.$$

Remplaçant β' par $\psi(\alpha')$, et α' par sa valeur $\frac{y}{x}$, on obtient l'intégrale générale

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

dans laquelle φ, ψ sont des fonctions arbitraires.

2° Soit encore l'équation

$$pqr - s(1 + p^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

qui appartient aux surfaces dont les lignes de l'une des courbures sont situées dans des plans parallèles au plan des zx.

Nous aurons (n° 14) les deux systèmes

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+p^2}{pq}, \quad dp = 0,$$

et

$$dy = 0, \quad pqdp - (1+p^2)\,dq = 0.$$

Le second système donne

$$\left.\begin{aligned} y &= \text{const}, \\ \beta\sqrt{1+p^2} &= q. \end{aligned}\right\}$$

On déduit de là une première intégrale intermédiaire de l'équation (32)

$$q = \sqrt{1+p^2}\,f'(y). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (33)$$

Du premier système on tire :

$$dp = 0, \quad \text{ou} \quad p = \alpha.$$

En combinant cette condition avec les relations

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1+\alpha^2}{\alpha q},$$

$$dz = pdx + qdy,$$

il vient

$$\alpha dz + dx = 0;$$

d'où

$$\alpha z + x = \beta.$$

Par suite, l'équation

$$x + pz = \varphi(p),$$

est une seconde intégrale intermédiaire de (32).

Il nous reste à intégrer l'équation

$$dz = pdx + qdy,$$

ce que nous pouvons faire en prenant p et y pour variables indépendantes.

Mais, en appliquant la méthode de *Jacobi*, on peut se contenter de la première intégrale intermédiaire (33).

En effet, on en déduit le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dy}{1} = \frac{dx}{\dfrac{-pf'(y)}{\sqrt{1+p^2}}} = \frac{dp}{0},$$

lequel nous donne

$$p = a_1;$$

par suite,

$$q = \sqrt{1+a_1^2}\, f'(y).$$

On a alors

$$dz = a_1 dx + \sqrt{1+a_1^2}\, f'(y)\, dy,$$

ou bien :

$$z - \varphi(a_1) = a_1 x + \sqrt{1+a_1^2}\, f(y).$$

L'intégrale générale s'obtient en éliminant a_1 entre les deux équations

$$\left.\begin{aligned} z - \varphi(a_1) - a_1 x - \sqrt{1+a_1^2}\, f(y) &= 0, \\ x + \varphi'(a_1) + \frac{a_1 f(y)}{\sqrt{1+a_1^2}} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Telles sont les deux équations qui représentent l'intégrale générale de (32), et auxquelles M. *Serret* est parvenu (*) après des transformations assez compliquées.

18. **Remarque.** — Il est facile de conclure des développements précédents que la méthode de *Monge* n'est applicable que dans des cas très-particuliers de l'équation biordinale linéaire (11). En effet, elle repose sur la possibilité d'intégrer les systèmes (16) et (17), ou l'un des deux au moins : or, c'est là un problème difficile dans beaucoup de cas, lorsque les coefficients R, S, T, U, seront des fonctions un peu compliquées de x, y, z, p, q.

19. Lorsque l'équation (11) est privée de second membre, et que les coefficients R, S, T sont des fonctions de p, q, seulement, on peut mettre l'équation

$$Rr + Ss + Tt = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

sous une forme qui sera très-utile pour l'intégration.

(*) Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 664. Paris; 1868.

Si nous posons en effet, d'après *Legendre* (*)

$$u = px + qy - z, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

nous aurons :

$$du = pdx + qdy + xdp + ydq - dz,$$

ou bien

$$du = xdp + ydq. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

Des équations (12) et (19), on tire :

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{t}{rt - s^2}\,dp - \frac{s}{rt - s^2}\,dq, \\ dy &= -\frac{s}{rt - s^2}\,dp + \frac{r}{rt - s^2}\,dq. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Si, au lieu de z, x, y, nous prenons pour variables, u, p, q, ces deux dernières étant les variables indépendantes nouvelles, nous aurons, à cause de (36),

$$\frac{du}{dp} = x, \quad \frac{du}{dq} = y.$$

En outre, des équations (37) on tire :

$$\frac{dx}{dp} = \frac{d^2u}{dp^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \quad \frac{dx}{dq} = \frac{dy}{dp} = \frac{d^2u}{dpdq} = -\frac{s}{rt - s^2},$$
$$\frac{dy}{dq} = \frac{d^2u}{dq^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Par conséquent,

$$\frac{d^2u}{dp^2}\frac{d^2u}{dq^2} - \left(\frac{d^2u}{dpdq}\right)^2 = \frac{1}{rt - s^2}.$$

Mais, on a :

$$r = (rt - s^2)\frac{d^2u}{dq^2}, \quad s = -(rt - s^2)\frac{d^2u}{dpdq}, \quad t = (rt - s^2)\frac{d^2u}{dp^2};$$

(*) Legendre, *Sur l'intégration de quelques équations aux différences partielles*, Mémoires de l'Académie des sciences, 1787; pp. 314 et suivantes.

donc,

$$r = \frac{\dfrac{d^2u}{dq^2}}{\dfrac{d^2u}{dp^2}\dfrac{d^2u}{dq^2} - \left(\dfrac{d^2u}{dpdq}\right)^2},$$

$$s = -\frac{\dfrac{d^2u}{dpdq}}{\dfrac{d^2u}{dp^2}\dfrac{d^2u}{dq^2} - \left(\dfrac{d^2u}{dpdq}\right)^2},$$

$$t = \frac{\dfrac{d^2u}{dp^2}}{\dfrac{d^2u}{dp^2}\dfrac{d^2u}{dq^2} - \left(\dfrac{d^2u}{dpdq}\right)^2}.$$

En substituant ces valeurs dans (34), on obtient :

$$R\frac{d^2u}{dq^2} - S\frac{d^2u}{dpdq} + T\frac{d^2u}{dp^2} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Cette équation est plus simple que la proposée : elle renferme seulement les dérivées du second ordre de u par rapport à p, q, tandis que la proposée renfermait les dérivées du premier et du second ordre de z par rapport à x et y. Il sera facile d'appliquer la méthode de *Monge* à cette équation (38). Il suit de là que l'intégrale de l'équation (34), qui n'aurait pu être trouvée directement par l'application de la méthode de *Monge*, peut cependant se déduire de l'intégrale de (38).

20. La théorie que nous venons d'exposer s'applique à une équation biordinale linéaire à deux variables indépendantes, quelle que soit la forme du terme indépendant U. Elle ramène l'intégration d'une équation de cette espèce à la recherche d'intégrales de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Mais elle ne conduit pas toujours au but : vraie en théorie, elle présente souvent (n° 18) de grandes difficultés dans la pratique. C'est ce qui nous engage à exposer ici, avant de terminer ce chapitre, deux autres méthodes qui pourraient réussir, lorsque l'on a reconnu l'impossibilité d'arriver à un résultat final par la mé-

thode de *Monge*. L'une, due à *Euler*, a été perfectionnée par *Laplace;* l'autre a été donnée par *Legendre.*

21. Méthode d'Euler. — Soit l'équation biordinale linéaire

$$Rr + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = U, \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

R, S, T, P, Q, N, U étant des fonctions de x, y; cherchons à la ramener à l'une des formes simples traitées précédemment.

A cet effet, nous supposerons, d'après *Euler* (*), qu'au lieu des variables x, y, on en prenne deux nouvelles u, v, reliées à x, y, par des équations de condition. Nous aurons alors :

$$du = \frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy,$$

$$dv = \frac{dv}{dx}dx + \frac{dv}{dy}dy,$$

$$dz = \frac{dz}{du}du + \frac{dz}{dv}dv = \left(\frac{dz}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx}\right)dx + \left(\frac{dz}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}\right)dy;$$

par suite,

$$p = \frac{dz}{du}\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dx},$$

$$q = \frac{dz}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dv}\frac{dv}{dy}.$$

On déduit de là :

$$r = \frac{d^2z}{du^2}\frac{du^2}{dx^2} + 2\frac{d^2z}{dudv}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{d^2z}{dv^2}\frac{dv^2}{dx^2} + \frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dx^2},$$

$$s = \frac{d^2z}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d^2z}{dudv}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{d^2z}{dv^2}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy} + \frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dxdy} + \frac{d^2z}{dudv}\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx} + \frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dxdy},$$

$$t = \frac{d^2z}{du^2}\frac{du^2}{dy^2} + 2\frac{d^2z}{dudv}\frac{du}{dy}\frac{dv}{dy} + \frac{d^2z}{dv^2}\frac{dv^2}{dy^2} + \frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{dz}{dv}\frac{d^2v}{dy^2}.$$

(*) Euler, *Institutiones calculi integralis*, t. III, pp. 258 et suivantes.

Ces valeurs substituées dans la proposée nous donnent la transformée suivante :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2z}{du^2}\left[\mathrm{R}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\mathrm{S}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\mathrm{T}\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]\\
+\;&\frac{d^2z}{dv^2}\left[\mathrm{R}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\mathrm{S}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}+\mathrm{T}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2\right]\\
+\;&\frac{d^2z}{dudv}\left[2\mathrm{R}\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}+\mathrm{S}\left(\frac{du}{dx}\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dy}\frac{dv}{dx}\right)+2\mathrm{T}\frac{du}{dy}\frac{dv}{dy}\right]\\
+\;&\frac{dz}{du}\left[\mathrm{R}\frac{d^2u}{dx^2}+\mathrm{S}\frac{d^2u}{dxdy}+\mathrm{T}\frac{d^2u}{dy^2}+\mathrm{P}\frac{du}{dx}+\mathrm{Q}\frac{du}{dy}\right]\\
+\;&\frac{dz}{dv}\left[\mathrm{R}\frac{d^2v}{dx^2}+\mathrm{S}\frac{d^2v}{dxdy}+\mathrm{T}\frac{d^2v}{dy^2}+\mathrm{P}\frac{dv}{dx}+\mathrm{Q}\frac{dv}{dy}\right]+\mathrm{N}z
\end{aligned}\right\}=\mathrm{U}. \quad (40)$$

22. Si maintenant, nous déterminons u et v en fonction de x, y, de telle manière que l'on ait :

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{R}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\mathrm{S}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy}+\mathrm{T}\left(\frac{du}{dy}\right)^2=0,\\
\mathrm{R}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\mathrm{S}\frac{dv}{dx}\frac{dv}{dy}+\mathrm{T}\left(\frac{dv}{dy}\right)^2=0,
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

l'équation (40) prendra la forme suivante :

$$\alpha\frac{d^2z}{dudv}+\beta\frac{dz}{du}+\gamma\frac{dz}{dv}+\delta z=\varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ étant des fonctions de u et v. Ces quantités u, v seront données en x, y, par l'équation du second degré

$$\mathrm{R}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\mathrm{S}\frac{dw}{dx}\frac{dw}{dy}+\mathrm{T}\left(\frac{dw}{dy}\right)^2=0,$$

de laquelle on déduit

$$\frac{dw}{dx}=\frac{-\mathrm{S}\pm\sqrt{\mathrm{S}^2-4\mathrm{RT}}}{2\mathrm{R}}\frac{dw}{dy}.$$

La fonction w sera donc déterminée par les équations différentielles ordinaires :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\frac{S \mp \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}} = \frac{dw}{0}, \quad \ldots \quad (41^{bis})$$

ou bien :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S \mp \sqrt{S^2 - 4RT}}{2R}, \quad w = \text{const.}$$

Par conséquent, u et v peuvent être égalés à l'une des deux intégrales $f_1(x, y), f_2(x, y)$ de la première des équations (41)

$$\left.\begin{aligned} u &= f_1(x, y), \\ v &= f_2(x, y). \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (43)$$

On conclut de ce qui précède que l'intégration de l'équation (39) se ramène à l'intégration de (42), lorsque l'on a $S^2 - 4RT > 0$. On obtient alors z en fonction de u et v; mais, comme en vertu de (43) u et v sont exprimées au moyen de x, y, on aura donc z en fonction de ces deux dernières variables.

23. **Remarque I.** — Si $S^2 - 4RT = 0$, les intégrales f_1, f_2 sont égales; mais alors les équations (41^{bis}) donnent

$$\frac{dy}{dx} = \frac{S}{2R}, \quad w = \text{const},$$

et l'on posera

$$u = f(x, y), \quad v = y.$$

Par suite,

$$\frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{dv}{dy} = 1,$$

et

$$p = \frac{dz}{du}\frac{du}{dx}, \quad q = \frac{dz}{du}\frac{du}{dy} + \frac{dz}{dy},$$

$$r = \frac{d^2z}{du^2}\frac{du^2}{dx^2} + \frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$s = \frac{d^2z}{du^2}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d^2z}{dudy}\frac{du}{dx} + \frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dxdy},$$

$$t = \frac{d^2z}{du^2}\frac{du^2}{dy^2} + 2\frac{d^2z}{dudy}\frac{du}{dy} + \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{dz}{du}\frac{d^2u}{dy^2}.$$

Le coefficient de $\frac{d^2z}{dudv}$ dans (40) se réduit alors à

$$S\frac{du}{dx} + 2T\frac{du}{dy};$$

mais, comme on a

$$\frac{du}{dx} = -\frac{S}{2R}\frac{du}{dy},$$

ce coefficient devient :

$$\frac{1}{2R}\frac{du}{dy}(4RT - S^2) = 0.$$

Par conséquent, l'équation (40) prend alors la forme suivante :

$$\alpha\frac{d^2z}{dv^2} + \beta\frac{dz}{du} + \gamma\frac{dz}{dv} + \delta z = \varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

Cette équation permet de trouver z en fonction de u, v, et, par conséquent, en fonction de x, y.

24. **Remarque II.** — Si $R = 0$, $T = 0$, les résultats précédents sont illusoires; mais, dans ce cas, l'équation proposée ayant déjà la forme (42), il est inutile de la transformer.

25. Nous sommes ainsi conduits à l'intégration de l'une des équations biordinales (*) :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2z}{dxdy} + \beta\frac{dz}{dx} + \gamma\frac{dz}{dy} + \delta z &= \varepsilon, \\ \frac{d^2z}{dx^2} + \beta\frac{dz}{dx} + \gamma\frac{dz}{dy} + \delta z &= \varepsilon. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

Considérons d'abord la première qui est de la forme

$$s + \beta p + \gamma q + \delta z = \varepsilon. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (46)$$

(*) Ces équations diffèrent de (42) et (44) seulement en ce que nous avons fait $\alpha = 1$, ce qui ne diminue pas évidemment la généralité de notre raisonnement.

Les équations (30) nous donnent dans le cas actuel les deux systèmes (*)

$$dx = 0, \quad dp - (\varepsilon - \beta p - \gamma q - \delta z)\, dy = 0, \quad . \quad . \quad (47)$$
$$dy = 0, \quad dq - (\varepsilon - \beta p - \gamma q - \delta z)\, dx = 0. \quad . \quad . \quad (48)$$

Si nous prenons d'abord le système (47), nous devons, en vertu de la première de ces équations, considérer x comme constante ; par suite, il viendra

$$dz = q dy.$$

Si, au moyen de cette dernière, nous éliminons q de la seconde équation (47), nous obtiendrons :

$$dp + \beta p dy + \gamma dz + (\delta z - \varepsilon)\, dy = 0.$$

Multipliant les deux membres par $e^{\int \beta dy}$, nous aurons :

$$d.pe^{\int \beta dy} + e^{\int \beta dy}\left[\gamma dz + (\delta z - \varepsilon)\, dy\right] = 0. \quad . \quad . \quad (49)$$

Or, pour que cette équation soit intégrable, il faut que le second terme soit une différentielle exacte par rapport à y et z; on doit donc avoir

$$\frac{d.e^{\int \beta dy}\gamma}{dy} = \frac{d.e^{\int \beta dy}(\delta z - \varepsilon)}{dz},$$

ou bien, puisque β, γ, δ, ε sont des fonctions de x, y seulement,

$$\delta - \beta\gamma - \frac{d\gamma}{dy} = 0. \ (**). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

En remplaçant δ par sa valeur dans l'équation (49) on obtient :

$$d.pe^{\int \beta dy} + e^{\int \beta dy}\left[\gamma dz + \beta\gamma z dy + \frac{d\gamma}{dy} z dy - \varepsilon dy\right] = 0,$$

(*) La méthode que j'emploie ici n'est pas celle de Laplace : elle a l'avantage d'être plus directe, et de montrer une nouvelle application des théories que j'ai développées précédemment (nos 13 à 15).

(**) C'est la condition trouvée par Laplace après de longs développements. Laplace, *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles*, Mémoires de l'Académie des sciences, 1773; p. 364.

ou, en intégrant,

$$pe^{\int \beta dy} + \gamma z e^{\int \beta dy} = \int \varepsilon e^{\int \beta dy} . dy + \psi(x).$$

Par conséquent

$$p + \gamma z = e^{-\int \beta dy} \left[\int e^{\int \beta dy} \varepsilon dy + \psi(x) \right].$$

Or, de cette équation qui peut être considérée comme une équation différentielle ordinaire et linéaire, on déduit, en posant $e^{-\int \beta dy} = \lambda$, l'équation

$$z e^{\int \gamma dx} = \varphi(y) + \int \left[\lambda \psi(x) + \lambda \int \frac{\varepsilon}{\lambda} dy \right] e^{\int \gamma dx} dx, \quad . \quad (51)$$

qui sera l'intégrale primitive de l'équation (40), pourvu que la condition (50) soit satisfaite.

26. Le système (48) conduit à un résultat analogue; en posant

$$e^{-\int \gamma dx} = \eta,$$

on trouve pour l'intégrale primitive :

$$z . e^{\int \beta dy} = \varphi(x) + \int \left[\eta \psi(y) + \eta \int \frac{\varepsilon}{\eta} dx \right] e^{\int \beta dy} dy, \quad (52)$$

pourvu que l'on ait la relation

$$\delta - \gamma\beta - \frac{d\beta}{dx} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Il résulte de là que l'on peut trouver l'intégrale primitive de (46) sous la forme (51) ou (52), dès que la condition (50) ou (53) est vérifiée.

27. Lorsque aucune des conditions (50) ou (53) n'est vérifiée, on peut poser (*)

$$\delta - \beta\gamma - \frac{d\beta}{dx} = \alpha. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

(*) Laplace, *Recherches sur le calcul intégral aux différences partielles*, Mémoires de l'Académie des sciences, 1773; pp. 370 et suivantes.

L'équation (46) donne alors

$$\frac{d\left[\frac{dz}{dy}+\beta z\right]}{dx}+\gamma\left[\frac{dz}{dy}+\beta z+\frac{\alpha}{\gamma}z\right]=\varepsilon.$$

Or, si nous posons encore

$$\frac{dz}{dy}+\beta z=z',$$

il viendra :

$$\frac{dz'}{dx}+\gamma z'+\alpha z=\varepsilon.$$

Mais, si l'on résout cette dernière équation par rapport à z,

$$z=\frac{1}{\alpha}\left[\varepsilon-\gamma z'-\frac{dz'}{dx}\right],$$

et que l'on calcule $\frac{dz}{dy}$ pour le substituer dans la précédente, ainsi que z, on aura pour déterminer z une équation du second ordre qui aura la même forme que (46)

$$\frac{d^2z'}{dxdy}+\beta'\frac{dz'}{dx}+\gamma\frac{dz'}{dy}+\delta'z'=\varepsilon', \quad \ldots \quad (55)$$

dans laquelle on a posé

$$\beta'=\beta-\frac{1}{\alpha}\frac{d\alpha}{dy},$$

$$\delta'=\alpha-\frac{\gamma}{\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\gamma}{dy}+\beta\gamma,$$

$$\varepsilon'=\frac{d\varepsilon}{dy}-\frac{\varepsilon}{\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\beta\varepsilon.$$

En opérant sur l'équation (55) comme nous l'avons fait pour l'équation (46), nous aurons, en posant

$$\delta'-\beta'\gamma'-\frac{d\beta'}{dx}=\alpha',$$

les deux équations

$$\frac{dz'}{dy} + \beta' z' = z'',$$
$$\frac{dz''}{dx} + \gamma z'' + \alpha' z' = \varepsilon'.$$

On continuera de la même manière jusqu'à ce que l'on obtienne une quantité α qui soit nulle; alors, en remontant successivement, on parviendra à la valeur de z.

Ainsi, en supposant $\alpha'' = 0$, z''' sera donnée par l'équation

$$\frac{dz'''}{dx} + \gamma z''' = \varepsilon'';$$

d'où

$$z''' = e^{-\int \gamma dx} \left[\int e^{\int \gamma dx} \varepsilon'' dx + \varphi(y) \right];$$

z'' sera alors déterminée par l'équation

$$\frac{dz''}{dy} + \beta'' z'' = z''',$$

laquelle nous donne

$$z'' = e^{-\int \beta'' dy} \left[\int e^{\int (\beta'' dy - \gamma dx)} \left\{ \int e^{\int \gamma dx} \varepsilon'' dx + \varphi(y) \right\} dy + \psi(x) \right].$$

On aura enfin

$$z' = \frac{-\frac{dz''}{dx} - \gamma z'' + \varepsilon'}{\delta' - \beta' \gamma' - \frac{d\beta'}{dx}}, \quad z = \frac{-\frac{dz'}{dx} - \gamma z' + \varepsilon}{\delta - \beta\gamma - \frac{d\beta}{dx}}.$$

28. Soit maintenant la seconde équation (45) qui est de la forme

$$r + \beta p + \gamma q + \delta z = \varepsilon, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

et qui rentre, par conséquent, dans le cas examiné (n° 14).

Les équations générales (n° 8) nous donnent un résultat illusoire; mais, des équations (28) on déduit (*) :

$$dy = 0, \quad dp + (\beta p + \gamma q + \delta z - \varepsilon) dx = 0. \quad . \quad . \quad (57)$$

(*) Ici, comme dans le cas précédent, j'ai préféré d'employer la méthode que j'ai exposée (n° 14). On aurait pu arriver au système (57) en éliminant r de l'équation (56), au moyen de la relation $dp = r dx + s dy$.

nous devons, en vertu de la première de ces équations (57), considérer y comme constant; par suite, il vient :

$$dz = pdx;$$

Si, au moyen de cette dernière nous éliminons p de la seconde équation (57), nous aurons :

$$dp + \beta dz + \gamma q dx + \delta z dx - \varepsilon dx = 0,$$

ce qui exige que l'on ait :

$$\gamma = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

Il vient alors

$$dp + [\beta dz + (\delta z - \varepsilon)\, dx] = 0.$$

Le second terme devant être une différentielle exacte par rapport à z et x, il faut que l'on ait :

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{d(\delta z - \varepsilon)}{dz} = \delta, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

ce qui nous donnera

$$dp + \beta dz + \frac{d\beta}{dx} z dx - \varepsilon dx = 0.$$

De cette dernière on tire, par l'intégration,

$$p + \beta z = \int \varepsilon dx + \psi(y),$$

et, par suite, on déduira de cette équation qui peut être considérée comme étant aux différentielles ordinaires,

$$z e^{\int \beta dx} = \int \left[\int \varepsilon dx + \psi(y) \right] e^{\int \beta dx} dx + \varphi(y) \quad . \quad . \quad (60)$$

Cette dernière équation sera l'intégrale primitive de (56), pourvu que les conditions (58) et (59) soient remplies.

29. **Remarque.** — La condition (58) réduisant l'équation (56) à la forme

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \beta \frac{dz}{dx} + \delta z = \varepsilon,$$

il était inutile d'opérer comme nous l'avons fait. Cette dernière

étant une équation différentielle ordinaire du second ordre entre z, x, on l'intégrera par les procédés connus, en y considérant y comme une constante, et remplaçant dans l'intégrale les constantes arbitraires par des fonctions de y (seconde partie, n° 5).

30. M. *Imschenetsky*, professeur à l'Université de Kazan, est parvenu à généraliser (*) la théorie de *Laplace* : il considère l'équation

$$Gs + Hp + K = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

dans laquelle G, H, K sont des fonctions de x, y, z, q.

Si nous multiplions les deux membres par dx, il vient :

$$Gdq + Hdz + Kdx = 0.$$

En supposant que z et q soient les variables indépendantes dans les deux premiers termes, on pourra déterminer le coefficient λ d'intégrabilité, et l'on aura

$$\int \lambda (Gdq + Hdz) = F(x, y, z, q). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Si l'on pose

$$u = F(x, y, z, q), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

on en déduira :

$$\frac{du}{dx} = \frac{dF}{dx} + \lambda (Gs + Hp) = \frac{dF}{dx} - \lambda K;$$

par suite,

$$\frac{du}{dx} = F_1(x, y, z, q). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Si les équations (63) et (64) sont composées de la même manière en z et q, on pourra éliminer ces quantités en même temps; on obtiendra ainsi une équation en $x, y, u, \frac{du}{dx}$, de laquelle on pourra déduire une équation du premier ordre renfermant une fonction arbitraire de y. Mais pour que z et q entrent de la même manière dans ces équations, on doit avoir

$$\frac{dF}{dz}\frac{dF_1}{dq} - \frac{dF}{dq}\frac{dF_1}{dz} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64^{bis})$$

(*) Imschenetsky, *Études sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Mémoires de l'Université de Kazan, 1868; t. III.

Ce sera donc la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une intégrale du premier ordre de la proposée.

Cette condition se ramène facilement à la suivante (*) :

$$G\left(\frac{dH}{dx}-\frac{dK}{dz}\right)+H\left(\frac{dK}{dq}-\frac{dG}{dx}\right)+K\left(\frac{dG}{dz}-\frac{dH}{dq}\right)=0. \quad (65)$$

(*) On peut le démontrer de la manière suivante :

L'équation (62) donne

$$\frac{dF}{dq}=\lambda G, \quad \frac{dF}{dz}=\lambda H;$$

en outre de la formule

$$F_1=\frac{dF}{dx}-\lambda K,$$

on déduit :

$$\frac{dF_1}{dq}=\frac{d^2F}{dxdq}-K\frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{dK}{dq}=\frac{d(\lambda G)}{dx}-K\frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{dK}{dq}$$

$$=\lambda\frac{dG}{dx}+G\frac{d\lambda}{dx}-K\frac{d\lambda}{dq}-\lambda\frac{dK}{dq},$$

$$\frac{dF_1}{dz}=\frac{d^2F}{dxdz}-K\frac{d\lambda}{dz}-\lambda\frac{dK}{dz}=\frac{d(\lambda H)}{dx}-K\frac{d\lambda}{dz}-\lambda\frac{dK}{dz}$$

$$=\lambda\frac{dH}{dx}+H\frac{d\lambda}{dx}-K\frac{d\lambda}{dz}-\lambda\frac{dK}{dz}.$$

Par suite, la condition (64^{bis}) nous donne :

$$\lambda H\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dK}{dq}\right)+\lambda G\left(\frac{dK}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+K\left(G\frac{d\lambda}{dz}-H\frac{d\lambda}{dq}\right)=0. \quad (66)$$

Mais de (62) on conclut évidemment

$$\frac{d(\lambda G)}{dz}=\frac{d(\lambda H)}{dq},$$

ou bien :

$$G\frac{d\lambda}{dz}-H\frac{d\lambda}{dq}=\lambda\left(\frac{dH}{dq}-\frac{dG}{dz}\right);$$

par conséquent, l'équation (66) devient, en divisant par λ,

$$H\left(\frac{dG}{dx}-\frac{dK}{dq}\right)+G\left(\frac{dK}{dz}-\frac{dH}{dx}\right)+K\left(\frac{dH}{dq}-\frac{dG}{dz}\right)=0,$$

ce qui est l'équation (65).

31. Lorsque cette condition n'est pas remplie, on devra opérer de la manière suivante :

Des équations (63) et (64) on déduit les relations :

$$\left.\begin{aligned} z &= f\left(x, y, u, \frac{du}{dx}\right), \\ q &= f_1\left(x, y, u, \frac{du}{dx}\right), \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (67)$$

lesquelles sont évidemment équivalentes à la proposée (*). De plus, remarquons que la quantité u doit être telle que les deux équations précédentes soient compatibles ; on doit donc avoir, en égalant à la seconde la dérivée de la première prise par rapport à y,

$$\frac{df}{dy} + \frac{df}{du}\frac{du}{dy} + \frac{df}{du'}\frac{du'}{dy} - f_1(x, y, u, u') = 0. \text{ (**)}. \quad (68)$$

En intégrant cette dernière, nous obtiendrons la valeur de u qu'il faut substituer dans

$$z = f(x, y, u, u'),$$

pour obtenir l'intégrale de la proposée.

32. **Remarque.** — Il est facile de démontrer que l'intégrale de (68) ne peut contenir de fonction arbitraire de x.

Si l'on multiplie, en effet, les trois premiers termes par dy, il vient, en intégrant,

$$\int \left(\frac{df}{dy}\,dy + \frac{df}{du}\,du + \frac{df}{du'}\,du'\right) = f(x, y, u, u').$$

En posant

$$v = f(x, y, u, u'),$$

(*) On démontre facilement cette condition en substituant dans la proposée les valeurs de z, p, q, s, déduites des deux équations (67) ce qui doit donner une identité.

(**) A partir d'ici, nous remplacerons, pour simplifier, $\frac{du}{dx}$ par u', et $\frac{du}{dy}$ par u_1. Cette notation est employée constamment par M. Imschenetsky.

on obtient, à cause de l'équation (68),

$$\frac{dv}{dy} = f_1(x, y, u, u') = v_1.$$

Par suite, si l'intégrale de (68) renfermait une fonction arbitraire de x, les quantités u, u' ne seront pas indépendantes, et l'on devra avoir

$$\frac{df}{du}\frac{df_1}{du'} - \frac{df}{du'}\frac{df_1}{du} = 0.$$

Or, les fonctions u, u', v, v_1, étant inverses, on sait que

$$\frac{df}{du}\frac{df_1}{du'} - \frac{df}{du'}\frac{df_1}{du} = \frac{1}{\frac{dF}{dv}\frac{dF_1}{dv_1} - \frac{dF}{dv_1}\frac{dF_1}{dv}}.$$

Mais comme, par hypothèse, le déterminant

$$\frac{dF}{dv}\frac{dF_1}{dv_1} - \frac{dF_1}{dv}\frac{dF}{dv_1}$$

est différent de zéro, ou de l'infini, il en résulte que le premier membre ne peut être ni nul, ni infini.

Il s'ensuit que l'équation (68), considérée comme linéaire par rapport à $\frac{du}{dy} = u_1, \frac{du'}{dy}$, ne peut servir à la solution du problème.

53. Cependant, si cette équation (68) est linéaire par rapport à $\frac{du}{dx} = u'$, et $\frac{du'}{dy}$, la question pourra être traitée, comme nous allons le voir. Observons d'abord que, si l'équation est linéaire, il faut que les fonctions f et f_1 soient linéaires par rapport à $\frac{du}{dx} = u'$; ainsi, on aura

$$f = \mathrm{M}u' + \mathrm{N}, \quad f_1 = mu' + n,$$

M, N, m, n, étant des fonctions de x, y, u.

L'équation (68) devient alors

$$\mathrm{M}\frac{du'}{dy} + \left(\frac{d\mathrm{M}}{du}u_1 + \frac{d\mathrm{M}}{dy} - m\right)u' + \frac{d\mathrm{N}}{du}u_1 + \frac{d\mathrm{N}}{dy} - n = 0,$$

ou bien :

$$g\frac{du'}{dy} + hu' + k = 0, \quad \ldots\ldots \quad (69)$$

en posant

$$M = g, \quad \frac{dM}{du}u_1 + \frac{dM}{dy} - m = h, \quad \frac{dN}{du}u_1 + \frac{dN}{dy} - n = k.$$

Si cette équation (69) vérifie la condition d'intégralité (65), c'est-à-dire si l'on a :

$$g\left(\frac{dh}{dx} - \frac{dk}{du}\right) + h\left(\frac{dk}{du_1} - \frac{dg}{dx}\right) + k\left(\frac{dg}{du} - \frac{dh}{du_1}\right) = 0, \quad (70)$$

elle aura une intégrale du premier ordre renfermant une fonction arbitraire de y. De cette équation du premier ordre, on pourra déduire l'intégrale générale de (69), et, par suite, l'intégrale générale de la proposée.

34. **Remarque I.** — L'équation (70) peut être simplifiée à cause des relations

$$\frac{dg}{du} = \frac{dh}{du_1} = \frac{dM}{du};$$

elle prendra la forme simple

$$g\left(\frac{dh}{dx} - \frac{dk}{du}\right) + h\left(\frac{dk}{du_1} - \frac{dg}{dx}\right) = 0.$$

35. **Remarque II.** — Si l'équation (69) ne satisfait pas à la condition d'intégrabilité, on pourra la transformer comme l'équation (61). En continuant ainsi, on arrive à une équation qui vérifiera la condition d'intégrabilité, et dont on déduira l'intégrale générale de la proposée; ou bien, on parviendra à reconnaître l'impossibilité d'intégrer la proposée.

36. **Remarque III.** — La condition d'intégrabilité (65) se réduit très-facilement à la formule de *Laplace*.

En effet, dans le cas de l'équation (46) considérée par *Laplace*, on a

$$G = 1, \quad H = \beta, \quad K = \gamma q + \delta z - \varepsilon.$$

Il vient alors pour l'équation (65)

$$\frac{d\beta}{dx} - \delta + \beta\gamma = 0,$$

ce qui est la relation (53).

On obtiendrait de la même manière la relation (50).

37. *Application.* — Soit l'équation biordinale

$$s - zp = 0.$$

En la comparant avec l'équation (61), on a :

$$G = 1, \quad H = 0, \quad K = -zp.$$

Par suite, en multipliant par dy,

$$\int (Gs + Hq)\, dy = \int s dy = \int dp = p.$$

Si donc on pose

$$p = u,$$

il viendra :

$$u_1 = s = zp;$$

par conséquent,

$$z = \frac{u_1}{p} = \frac{u_1}{u} = \frac{d \log u}{dy}.$$

On obtient alors :

$$\frac{d^2 \log u}{dy\, dx} = u.$$

On déduit de cette dernière (*)

$$u = \frac{2\varphi'(x)\,\psi'(y)\, e^{\varphi(x)+\psi(y)}}{(1 - e^{\varphi(x)+\psi(y)})^2};$$

d'où

$$\log u = \log 2 + \log \varphi'(x) + \log \psi'(y) + \varphi(x) + \psi(y) - 2 \log (1 - e^{\varphi(x)+\psi(y)}).$$

(*) Monge, *Application de l'analyse à la géométrie.* Notes de M. Liouville. note IV, p. 598.

On trouve facilement u_1 ; par conséquent, l'intégrale générale de la proposée est :

$$z = \frac{u_1}{u} = \frac{\psi''(y)}{\psi'(y)} + \psi'(y) + 2\frac{e^{\varphi(x)+\psi(y)}\psi'(y)}{1-e^{\varphi(x)+\psi(y)}}. \quad (*)$$

38. **Remarque.** — En multipliant la proposée par dx, et intégrant, on obtient l'intégrale du premier ordre :

$$q - \frac{1}{2}z^2 = \theta(y).$$

Cette dernière doit évidemment être satisfaite par l'intégrale que nous venons de trouver.

C'est ce que l'on vérifie facilement : en effet, on a :

$$q = \frac{d^2\log\psi'}{dy^2} + \psi'' + 2\psi''\frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2\frac{e^{\varphi+\psi}}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2\frac{e^{2\varphi+2\psi}}{(1-e^{\varphi+\psi})^2},$$

et

$$\frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\log\psi'}{dy} + \psi'\right)^2 + 2\left(\frac{d\log\psi'}{dy} + \psi'\right)\frac{e^{\varphi+\psi}\psi'}{1-e^{\varphi+\psi}} + 2\psi'^2\frac{e^{2\varphi+2\psi}}{(1-e^{\varphi+\psi})^2}.$$

(*) Il est très-facile de voir que l'on arriverait plus rapidement à l'intégrale de la proposée, si on la mettait sous la forme :

$$\frac{dp}{dy} - zp = 0.$$

D'où

$$\frac{\frac{dp}{dy}}{p} = z,$$

ou bien :

$$\frac{d\log p}{dy} = z.$$

Par conséquent,

$$\frac{d^2\log p}{dydx} = p.$$

La valeur de p sera alors celle que nous avons désignée par u; la marche que nous avons suivie dans le texte est la marche générale. Nous avons voulu l'indiquer, quoiqu'elle soit plus longue, afin de bien montrer l'usage de la théorie.

Par suite

$$q - \frac{1}{2}z^2 = \frac{d^2 \log \psi'}{dy^2} + \psi'' - \frac{1}{2}\left(\frac{d \log \psi'}{dy} + \psi'\right)^2.$$

Or, le second membre étant une fonction de y, cette équation coïncide avec

$$q - \frac{1}{2}z^2 = \theta(y),$$

puisque θ indique une fonction arbitraire.

39. Soit encore l'équation biordinale

$$(x + yz)\, s - ypq + \frac{y(z-1)}{x+y} q = 0.$$

Multipliant par dx, il vient :

$$(x + yz)\, dq - yqdz + \frac{y(z-1)}{x+y} qdx = 0.$$

Or, le facteur d'intégrabilité des deux premiers termes est $\frac{1}{q^2}$, et l'on a

$$\int \frac{(x + yz)\, dq - yqdz}{q^2} = -\frac{x + yz}{q}.$$

Si l'on pose

$$u = -\frac{x + yz}{q},$$

on obtient :

$$u' = -\frac{q + qyp - (x + yz)\, s}{q^2};$$

ou, en vertu de la proposée,

$$u' = -\frac{q + \dfrac{y(z-1)}{x+y}}{q^2} = -\frac{x + yz}{q(x+y)} = \frac{u}{x+y}.$$

Cette dernière équation, mise sous la forme

$$\frac{u'}{u} = \frac{1}{x+y},$$

nous donne, par l'intégration, en supposant toujours y constant,

$$u = c(x + y),$$

d'où

$$u = (x + y)\,\varphi(y).$$

En égalant les deux valeurs de u, on trouve :

$$q = -\frac{x + yz}{(x + y)\,\varphi(y)} = -\frac{x}{(x + y)\,\varphi(y)} - \frac{yz}{(x + y)\,\varphi(y)}. \quad (*)$$

Par conséquent, l'intégrale générale de la proposée est

$$z = e^{-\int \frac{y}{(x+y)\varphi(y)}dy}\left[\psi(x) - \int e^{\int \frac{ydy}{(x+y)\varphi(y)}} \frac{xdy}{(x + y)\,\varphi(y)}\right].$$

40. Méthode de Legendre. — *Legendre* considère l'équation biordinale

$$r + Ss + Tt + Pp + Qq + Nz = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Il est parvenu (**), en désignant par m et n les racines de l'équation

$$m^2 - Sm + T = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

(*) Cette équation différentielle peut être intégrée comme une équation linéaire du premier ordre.

(**) Legendre, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, Mémoires de l'Académie des sciences, 1787; pp. 319 et suivantes. « Ces » résultats, dit Legendre, sont le fruit d'un calcul assez pénible dont je » crois devoir supprimer les détails, à cause de leur longueur. » Il est probable que la marche qu'il a adoptée a été la suivante : il aura posé, par analogie avec la méthode de Monge, l'équation $m^2 - Sm + T = 0$, de laquelle on déduit $m + n = S$, $mn = T$; en remplaçant dans la proposée S et T par ces valeurs, on trouve :

$$\frac{d^2z}{dx^2} + m\frac{d^2z}{dxdy} + n\frac{d^2z}{dxdy} + mn\frac{d^2z}{dy^2} + P\frac{dz}{dx} + Q\frac{dz}{dy} + Nz = 0.$$

Les quatre premiers termes peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{dz}{dx} + m\frac{dz}{dy}\right] - \frac{dm}{dx}\frac{dz}{dy} + n\frac{d}{dy}\left[\frac{dz}{dx} + m\frac{dz}{dy}\right] - n\frac{dm}{dy}\frac{dz}{dy},$$

et alors par quelques transformations que l'on pourrait retrouver sans difficulté, il sera arrivé aux équations (73).

M. Ed. Combescure a indiqué récemment un moyen de rétablir les détails supprimés par Legendre, *Remarques sur un mémoire de Legendre*, Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences, 1872; p. 798.

à remplacer la proposée par le système suivant :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{dx} + m\frac{dz}{dy} + \lambda z = z', \\ &\frac{dz'}{dx} + n\frac{dz}{dy} + \mu z' = \nu z, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (73)$$

dans lequel on pose

$$(2m - S)\lambda = (S - m)\frac{dm}{dy} + Pm - Q,$$

$$\mu = P - \lambda, \quad \nu = \frac{d\lambda}{dx} + n\frac{d\lambda}{dy} + \lambda\mu - N;$$

c'est ce que l'on peut vérifier facilement en éliminant z' entre les deux équations (73).

Si ν est différent de zéro, l'équation qui détermine z' sera du second ordre, et de la forme

$$\frac{d^2z'}{dx^2} + S\frac{d^2z'}{dxdy} + T\frac{d^2z'}{dy^2} + K\frac{dz'}{dx} + L\frac{dz'}{dy} + Mz' = 0,$$

et l'on pourra la transformer comme la proposée en un système de deux équations

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz'}{dx} + m\frac{dz'}{dy} + \lambda' z' = z'', \\ &\frac{dz''}{dx} + n\frac{dz''}{dy} + \mu' z'' = \nu' z', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (74)$$

dans lequel on aura posé

$$(n - m)\alpha = \frac{dn}{dx} + m\frac{dn}{dy} - \frac{dm}{dx} - n\frac{dm}{dy},$$

$$\nu\beta = \frac{d\nu}{dx} + m\frac{d\nu}{dy},$$

$$\lambda' = \lambda - \alpha - \beta, \quad \mu' = \mu + \alpha,$$

$$\nu' = \nu + \frac{d\lambda'}{dx} + n\frac{d\lambda'}{dy} + \lambda'\alpha - \frac{d\mu}{dx} - m\frac{d\mu}{dy} - \mu\alpha.$$

Les quantités m, n sont les mêmes que dans le système (73).

En continuant de la même manière, on ramènera l'intégration de la seconde des équations (74) à l'intégration du système

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz''}{dx} + m\frac{dz''}{dy} + \lambda''z'' &= z''', \\ \frac{dz'''}{dx} + n\frac{dz'''}{dy} + \mu''z''' &= \nu''z'', \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (75)$$

dans lequel on pose

$$\begin{aligned} \nu'\beta' &= \frac{d\nu'}{dx} + m\frac{d\nu'}{dy}, \\ \lambda'' &= \lambda' - \alpha - \beta' = \lambda - 2\alpha - \beta - \beta', \\ \mu'' &= \mu' + \alpha = \mu + 2\alpha, \\ \nu'' &= \nu' + \frac{d\lambda''}{dx} + n\frac{d\lambda''}{dx} + \lambda''\alpha - \frac{d\mu'}{dx} - m\frac{d\mu'}{dy} - \mu'\alpha, \end{aligned}$$

et ainsi de suite; les quantités m, n, α restent les mêmes dans tous les systèmes successifs.

41. On pourra continuer de la même manière, tant que l'on voudra : si l'on égale une des quantités ν à zéro, l'équation ainsi obtenue

$$\nu^{(i)} = 0,$$

exprime la condition pour que l'intégrale de la proposée soit composée d'un nombre fini de termes; on pourra déterminer cette intégrale comme nous le verrons dans le numéro suivant.

42. Si l'une des quantités ν est égale à zéro, l'équation proposée satisfait à la condition d'intégrabilité, et l'on devra s'arrêter au système qui y correspond.

Ainsi, par exemple, soit $\nu'' = 0$; nous aurons, pour déterminer z''' l'équation primordinale

$$\frac{dz'''}{dx} + n\frac{dz'''}{dy} + \mu''z''' = 0;$$

à cause de $\mu'' = \mu + 2\alpha$, elle devient :

$$\frac{dz'''}{dx} + n\frac{dz'''}{dy} + (\mu + 2\alpha)\, z''' = 0.$$

z''' étant déterminée par cette équation, la première équation du système (75) nous donne :

$$\frac{dz''}{dx} + m\frac{dz''}{dy} + \lambda''z'' = z'''.$$

Or, à cause de

$$\lambda'' = \lambda - 2\alpha - \beta - \beta',$$

on obtient :

$$\frac{dz''}{dx} + m\frac{dz''}{dy} + (\lambda - 2\alpha - \beta - \beta')\,z'' = z'''.$$

Si maintenant, nous posons $z'' = \nu\nu'\,Z''$, il viendra :

$$\frac{dZ''}{dx} + m\frac{dZ''}{dy} + (\lambda - 2\alpha)\,Z'' = \frac{z'''}{\nu\nu'},$$

équation du premier ordre qui servira à déterminer Z''; on déduira z'' de

$$z'' = \nu\nu' Z''.$$

On pourra alors trouver successivement z' et z, au moyen des équations

$$\frac{dz''}{dx} + n\frac{dz''}{dy} + \mu' z'' = \nu' z',$$

$$\frac{dz'}{dx} + m\frac{dz'}{dy} + \mu z' = \nu z.$$

43. *Application.* — Soit l'équation (*)

$$\frac{d^2z}{dx^2} - a^2y^{2p}\frac{d^2z}{dy^2} = 0, \quad \text{ou} \quad r - a^2y^{2p}t = 0.$$

On trouve facilement

$$m = ay^p, \quad n = -ay^p;$$

en posant

$$\frac{dm}{dy} = m', \quad \frac{p-1}{p} = q,$$

(*) Legendre, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, Mémoires de l'Académie des sciences, 1787; p. 322.

on a :

$$\lambda^{(i)} = -\left(\frac{1}{2} + 2iq\right) m', \quad \nu^{(i)} = \frac{(2iq+1)\left[(2i+2)q-1\right]}{4}.$$

La condition $\nu^{(i)} = 0$, nous montre que l'équation sera intégrable, lorsque l'on aura

$$2iq + 1 = 0,$$

ou bien :

$$2(i+1)q - 1 = 0,$$

c'est-à-dire

$$q = \mp \frac{1}{2i};$$

par suite,

$$p = \frac{2i}{2i \pm 1}.$$

Cette condition est la même que celle de l'équation de *Riccati*.

III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS BIORDINALES LINÉAIRES RENFERMANT PLUS DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES.

44. La méthode de *Monge* s'applique facilement aux équations biordinales linéaires à un nombre quelconque de variables indépendantes.

Soit, par exemple, l'équation à trois variables

$$R\frac{d^2V}{dx^2} + S\frac{d^2V}{dy^2} + T\frac{d^2V}{dz^2} + P\frac{d^2V}{dxdy} + Q\frac{d^2V}{dxdz} + N\frac{d^2V}{dydz} = U, \quad (76)$$

dans laquelle les coefficients R, S, T, P, Q, N, U, sont des fonctions de $x, y, z, V, \frac{dV}{dx} = p, \frac{dV}{dy} = q, \frac{dV}{dz} = u$.

Nous aurons évidemment :

$$dV = pdx + qdy + udz,$$

$$d\cdot\frac{dV}{dx} = dp = \frac{d^2V}{dx^2}dx + \frac{d^2V}{dxdy}dy + \frac{d^2V}{dxdz}dz,$$

$$d\cdot\frac{dV}{dy}=dq=\frac{d^2V}{dxdy}dx+\frac{d^2V}{dy^2}dy+\frac{d^2V}{dydz}dz,$$
$$d\cdot\frac{dV}{dz}=du=\frac{d^2V}{dxdz}dx+\frac{d^2V}{dydz}dy+\frac{d^2V}{dz^2}dz;$$

par suite

$$\frac{d^2V}{dx^2}=\frac{dp-\frac{d^2V}{dxdy}dx-\frac{d^2V}{dxdz}dz}{dx},$$
$$\frac{d^2V}{dy^2}=\frac{dq-\frac{d^2V}{dxdy}dx-\frac{d^2V}{dydz}dz}{dy},$$
$$\frac{d^2V}{dz^2}=\frac{du-\frac{d^2V}{dxdz}dx-\frac{d^2V}{dydz}dy}{dz}.$$

En substituant ces valeurs dans la proposée, il vient :

$$\left.\begin{aligned}&Rdudxdy+Sdpdydz+Tdqdxdz-Udzdxdy=\\&=\frac{d^2V}{dxdy}(Sdy^2dz+Tdx^2dz-Ndxdydz)\\&+\frac{d^2V}{dxdz}(Rdx^2dy+Sdydz^2-Pdxdydz)\\&+\frac{d^2V}{dydz}(Rdxdy^2+Tdxdz^2-Qdxdydz).\end{aligned}\right\}$$

Or, cette équation se décompose dans les quatre suivantes :

$$\left.\begin{aligned}Rdx^2dy+Sdydz^2-Pdxdydz&=0,\\Rdxdy^2+Tdxdz^2-Qdxdydz&=0,\\Sdy^2dz+Tdx^2dz-Ndxdydz&=0,\\Rdudxdy+Sdpdydz+Tdqdxdz-Udzdxdy&=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(77)$$

En posant

$$dx=mdz,\quad dy=ndz,$$

les trois premières nous donnent :

$$\left.\begin{aligned}Rm^2-Pm+S&=0,\\Rn^2-Qn+T&=0,\\Sn^2-Nmn+Tm^2&=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(78)$$

Pour que ces équations qui ne renferment que deux inconnues m, n, soient compatibles, il faut que l'on ait la relation

$$RN^2 + SQ^2 + TP^2 - 4RST - PQN = 0. \quad (*)$$

45. Lorsque cette condition sera satisfaite, les équations (77) nous donneront le système

$$\left.\begin{aligned} dx - mdz &= 0, \\ dy - ndz &= 0, \\ Rmndu + Sndp + Tmdq - Umndz &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (79)$$

auquel on devra ajouter

$$dV = pdx + qdy + udz.$$

De ces équations on pourra déduire trois intégrales

$$\varphi_1 = a, \quad \varphi_2 = a', \quad \varphi_3 = a'',$$

et l'on aura pour l'une des intégrales premières de la proposée

$$\varphi_1 = \psi(\varphi_2, \varphi_3).$$

46. L'autre intégrale première se déduira de la même manière du système (79) dans lequel on remplacera m, n, par m', n'. D'ailleurs, l'intégrale générale s'obtient sans difficulté de l'une ou l'autre des intégrales premières par la méthode exposée dans la première partie.

47. *Autre méthode.* — Des considérations analogues à celles

(*) Cette condition qui résulte de l'élimination de m et n entre les équations (78) se trouve très-facilement, en posant $n = tm$, et en éliminant de la manière connue t et m entre les trois équations résultantes. Cette condition a été donnée pour la première fois par Euler, dans le cas d'une équation homogène. Euler, *Institutiones calculi integralis*, t. III, p. 448.

que nous avons exposées (n° 40), permettent de remplacer l'équation à quatre variables

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2v}{dx^2}+S\frac{d^2v}{dxdy}+T\frac{d^2v}{dy^2}+U\frac{d^2v}{dxdz}+V\frac{d^2v}{dydz}+W\frac{d^2v}{dz^2}\\&\quad+P\frac{dv}{dx}+Q\frac{dv}{dy}+I\frac{dv}{dz}+Lz=0,\ (*)\end{aligned}\right\}\ldots(80)$$

dans laquelle les coefficients sont des fonctions de x, y, z, seulement, par le système des deux équations du premier ordre :

$$\frac{dv}{dx}+m\frac{dv}{dy}+n\frac{dv}{dz}+\lambda v=v',\ldots\ldots(81)$$

$$\frac{dv'}{dx}+m'\frac{dv'}{dy}+n'\frac{dv'}{dz}+\mu v'=\nu v.\ldots\ldots(82)$$

Lorsque $\nu=0$, ces équations sont du premier ordre, et elles pourront servir à déterminer l'intégrale de la proposée. Mais, si ν est différent de zéro, on ramènera l'intégration de l'équation (82), qui, après l'élimination de v, serait du second ordre, à un système de deux équations du premier ordre

$$\frac{dv'}{dx}+m\frac{dv'}{dy}+n\frac{dv'}{dz}+\lambda'v'=v'',$$

$$\frac{dv''}{dx}+m'\frac{dv''}{dy}+n'\frac{dv''}{dz}+\mu'v''=\nu'v'.$$

On continuera les mêmes opérations jusqu'à ce que l'on arrive à une quantité $\nu^{(i)}=0$: sinon, on posera $\nu^{(i)}=0$, et ce sera la condition nécessaire à l'intégration de (80).

48. La marche à suivre est tout à fait la même que ci-dessus (n° 40) : quant aux coefficients m, n, m', n', ils sont donnés par les relations suivantes :

$$S=2m+i,\qquad I=m^2+mi,$$

$$U=2n+j,\qquad V=2mn+mj+ni,$$

$$W=n^2+nj,$$

$$m'=m+i,\qquad n'=n+j.$$

(*) Legendre, *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles*, Mémoires de l'Académie des sciences, 1787 ; pp. 525 et suivantes.

De ces dernières, on déduit l'équation de condition

$$(SU - 2V)^2 = (S^2 - 4T)(U^2 - 4W),$$

laquelle doit avoir lieu pour que l'on puisse trouver l'intégrale de la proposée. Cette condition est la même que celle que nous avons trouvée (n° 44).

IV.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS BIORDINALES NON LINÉAIRES DE LA FORME $Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0$. — MÉTHODE D'AMPÈRE.

49. On peut appliquer à une équation biordinale non linéaire

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

la méthode que nous avons exposée pour les équations linéaires (n° 7). A cet effet, on remplace au moyen des relations

$$\left.\begin{aligned} dp &= r\,dx + s\,dy, \\ dq &= s\,dx + t\,dy, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

r et t dans l'équation (83), et l'on décompose le résultat obtenu en plusieurs équations qu'il s'agira d'intégrer pour trouver une équation

$$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

satisfaisant à la proposée.

50. Cependant, si l'on connaît deux fonctions f_1, f_2, vérifiant chacune séparément ces équations, on ne peut pas en conclure immédiatement, comme au n° 10, que l'équation

$$f_2 = \varphi(f_1),$$

renfermant les dérivées p, q, et les variables x, y, z, satisfera à (83).

51. Cherchons actuellement dans quels cas cette proposition aura encore lieu. Soient u, v, deux intégrales des équations

obtenues par la transformation de (83) : u, v, sont des fonctions de x, y, z, p, q. Cela posé, cherchons quelle doit être la forme la plus générale de l'équation (83), pour que

$$u = \varphi(v), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

soit encore une intégrale. En d'autres termes, examinons la forme de l'équation du second ordre résultant de l'élimination de la fonction arbitraire φ de l'équation du premier ordre (84).

Si nous prenons les dérivées partielles de (84) par rapport à x, y, il vient :

$$\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}p + \frac{du}{dp}r + \frac{du}{dq}s = \frac{d\varphi}{dv}\left[\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}p + \frac{dv}{dp}r + \frac{dv}{dq}s\right],$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}q + \frac{du}{dp}s + \frac{du}{dq}t = \frac{d\varphi}{dv}\left[\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}q + \frac{dv}{dp}s + \frac{dv}{dq}t\right];$$

en éliminant $\frac{d\varphi}{dv}$, on obtient :

$$\left(\frac{du}{dx} + \frac{du}{dz}p + \frac{du}{dp}r + \frac{du}{dq}s\right)\left(\frac{dv}{dy} + \frac{dv}{dz}q + \frac{dv}{dp}s + \frac{dv}{dq}t\right) =$$

$$= \left(\frac{du}{dy} + \frac{du}{dz}q + \frac{du}{dp}s + \frac{du}{dq}t\right)\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dz}p + \frac{dv}{dp}r + \frac{dv}{dq}s\right).$$

Or, en effectuant les opérations indiquées, on arrive à une équation de la forme

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

dans laquelle les coefficients H, K, L, M, N sont des fonctions de x, y, z, p, q.

De la manière dont cette équation a été obtenue, il résulte évidemment que *toute équation de la forme* (85) *n'admet pas une intégrale du premier ordre de la forme* (84) : cela ne peut avoir lieu que si les coefficients H, K, L, M, N vérifient certaines conditions (*). Cette équation (84) est alors appelée une *intégrale*

(*) Nous verrons plus loin quelle est la condition d'intégrabilité : nous la trouverons très-simplement en employant les notations de M. de Morgan.

intermédiaire (*), ou une *intégrale première* de (85). Comme on sait intégrer une équation du premier ordre, le problème sera résolu.

52. Nous nous proposons actuellement de rechercher cette intégrale intermédiaire, lorsqu'elle existe. Dans ce but, nous appliquerons à l'équation proposée la méthode exposée par *Ampère*, dans ses deux grands mémoires (**) présentés à l'Institut en 1814. Ces mémoires ne sont pas faciles à lire à cause surtout de la notation adoptée par l'auteur pour les diverses dérivées (***). J'ai légèrement modifié cette notation, et il me paraît que j'ai ainsi quelque peu simplifié l'étude de cette théorie.

53. *Notations.* — Nous aurons à considérer trois espèces de dérivées partielles :

1° Des dérivées partielles prises en considérant x, y, comme variables indépendantes; nous les noterons

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}.$$

2° Des dérivées partielles prises en considérant comme variables indépendantes x et une nouvelle quantité α, dont nous parlerons plus loin; nous les notons

$$\frac{du}{dx}, \quad \frac{du}{d\alpha}.$$

3° Des dérivées partielles relatives à x et à une autre quantité β prises pour variables indépendantes; nous les désignons par

$$\left(\frac{du}{dx}\right), \quad \left(\frac{du}{d\beta}\right).$$

(*) Ce nom lui a été donné par Ampère, *Considérations générales sur les équations différentielles partielles*, Journal de l'École polytechnique, 17e cah., p. 549.

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 17e et 18e cahier.

(***) Ampère, *Considérations générales sur les équations différentielles partielles*, Journal de l'École polytechnique, 17e cahier, p. 570.

54. Cela posé, soit l'équation biordinale

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Désignons par α une fonction de x, y, actuellement indéterminée; y est alors une fonction de x, et de α, et il en est de même de z, p, q.

Nous aurons par conséquent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= p + q\frac{dy}{dx}, & \frac{dz}{d\alpha} &= q\frac{dy}{d\alpha}, \\ \frac{dp}{dx} &= r + s\frac{dy}{dx}, & \frac{dp}{d\alpha} &= s\frac{dy}{d\alpha}, \\ \frac{dq}{dx} &= s + t\frac{dy}{dx}, & \frac{dq}{d\alpha} &= t\frac{dy}{d\alpha}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

On tire de là :

$$\left.\begin{aligned} t &= \frac{\frac{dq}{d\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha}}, \quad s = \frac{dq}{dx} - t\frac{dy}{dx}, \\ r &= \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86^{bis})$$

En remplaçant $r, s, rt - s^2$, dans la proposée, on obtient une équation de la forme

$$P + Qt = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

Or, si nous déterminons la quantité arbitraire α de manière que l'on ait $P = 0$, l'équation (87) se décompose en deux autres :

$$P = 0, \quad Q = 0;$$

On a donc :

$$H\left(\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\right) + 2K\frac{dq}{dx} + M - N\left(\frac{dq}{dx}\right)^2 = 0, \quad . \quad (88)$$

$$H\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2K\frac{dy}{dx} + L + N\left(\frac{dp}{dx} + \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\right) = 0. \quad . \quad (89)$$

Si nous remplaçons dans l'équation (89), $\frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$ par leurs valeurs (86), il viendra :

$$(H + Nt)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2(K - Ns)\frac{dy}{dx} + L + Nr = 0. \quad . \quad (90)$$

De cette équation, on tire, en tenant compte de (85),

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mathrm{K} - \mathrm{N}s \pm \sqrt{\mathrm{K}^2 - \mathrm{HL} + \mathrm{MN}}}{\mathrm{H} + \mathrm{N}t} \quad . \quad . \quad . \quad (90^{bis})$$

Mais, puisque

$$\frac{dq}{dx} = s + t\frac{dy}{dx},$$

l'équation (90^{bis}) donne :

$$\mathrm{H}\frac{dy}{dx} + \mathrm{N}\frac{dq}{dx} = \mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91)$$

où l'on a posé

$$\mathrm{K}^2 - \mathrm{HL} + \mathrm{MN} = \mathrm{G}.$$

Au moyen de (90) l'équation (88) se réduit à la suivante :

$$\mathrm{H}\frac{dp}{dx} + \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dq}{dx} + \mathrm{M} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92)$$

Il est facile de voir qu'en remplaçant dans (91) et (92) $\frac{dp}{dx}, \frac{dq}{dx}$, par leurs valeurs (86), on retrouve l'équation proposée (85).

55. **Remarque I.** — En éliminant $\frac{dq}{dx}$ entre (91) et (92), on obtient :

$$\mathrm{N}\frac{dp}{dx} - \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dy}{dx} + \mathrm{L} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (93)$$

équation qui pourra être employée au lieu de (92) (*).

56. **Remarque II.** — Le double signe dépend de ce que l'on peut prendre pour α l'une ou l'autre des deux quantités qui composent les deux fonctions arbitraires de l'intégrale. En désignant

(*) De même, en éliminant entre ces mêmes équations le terme indépendant, on trouve :

$$\left(\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dp}{dx} + \mathrm{L}\frac{dq}{dx} + \mathrm{M}\frac{dy}{dx} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93^{bis})$$

On peut donc remplacer les équations (91) et (92), qui existent respectivement entre les différentielles de x, y, q, et de x, p, q, par les équations (93) et (93^{bis}) entre les différentielles de x, y, p, et de y, p, q.

ces deux fonctions arbitraires par α, β, nous aurons les deux systèmes suivants :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}\frac{dy}{dx} + \mathrm{N}\frac{dq}{dx} - \mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}} = 0, \\ \mathrm{H}\frac{dp}{dx} + \left(\mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dq}{dx} + \mathrm{M} = 0; \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}\left(\frac{dy}{dx}\right) + \mathrm{N}\left(\frac{dq}{dx}\right) - \mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}} = 0, \\ \mathrm{H}\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(\mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + \mathrm{M} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Dans le premier système, les variables indépendantes sont α et x, tandis que dans le second, elles sont β et x.

En joignant aux équations précédentes l'équation

$$dz - pdx - qdy = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

on obtient cinq relations entre $x, y, z, p, q, \alpha, \beta$: on éliminera p, q, et des trois équations restantes, on déduira y, z, β en fonction de x, α.

Observons encore que l'équation (96) peut être remplacée par

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}. \quad (*). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

57. On peut d'ailleurs encore écrire les équations (94), (95) et (96) sous la forme suivante (**) :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}dy + \mathrm{N}dq - \left(\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}\right)dx = 0, \\ \mathrm{H}dp + \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right)dq + \mathrm{M}dx = 0, \\ dz - pdx - qdy = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

La deuxième de ces équations (98) peut encore être trans-

(*) Il faut bien remarquer ici que $\frac{dz}{dx}, \frac{dy}{dx}$ sont les dérivées partielles de z, y relatives à x, en supposant que x et α sont les variables indépendantes : elles diffèrent des $\frac{dz}{dx}, \frac{dy}{dx}$, déduites de (96).

(**) Nous trouverons plus loin ces équations déduites directement de (85) par l'extension de la méthode de Monge.

formée : en effet, si l'on élimine dq, et si l'on a égard à la relation

$$G = K^2 - HL + MN,$$

on obtient :

$$N dp - \left(K \mp \sqrt{G}\right) dy + L dx = 0.$$

On a ainsi le système (*)

$$\left.\begin{aligned} N dq + H dy - \left(K \pm \sqrt{G}\right) dx &= 0, \\ N dp - \left(K \mp \sqrt{G}\right) dy + L dx &= 0, \\ dz - p dx - q dy &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (98^{bis})$$

Ces équations ont reçu le nom d'équations des *caractéristiques :* cette dénomination provient de la signification géométrique que *Monge* en a donnée.

58. **Remarque.** — Les équations (98) et (98^{bis}) ne sont pas des équations simultanées aux différentielles ordinaires. Les quantités y, z, p, q, qui y entrent sont des fonctions de x, α, cette dernière variable étant renfermée implicitement dans les équations. La quantité α est le *paramètre* des caractéristiques : elle montre la génération par une courbe de la surface représentée par l'équation biordinale proposée (85).

59. Dans les équations (95), on peut remplacer les dérivées prises en supposant x, β, variables indépendantes par des dérivées relatives à x, α.

On sait que, en général,

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = \frac{du}{dx} + \frac{du}{d\alpha}\left(\frac{d\alpha}{dx}\right).$$

En appliquant cette formule aux équations (95), on obtient, après quelques transformations simples, et en observant que

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = -\frac{\dfrac{d\beta}{dx}}{\dfrac{d\beta}{d\alpha}},$$

(*) Voir la seconde note de la page précédente.

$$\left.\begin{aligned}&\left(\mathrm{H}\frac{dy}{d\alpha}+\mathrm{N}\frac{dq}{d\alpha}\right)\frac{d\beta}{dx}-2\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{d\beta}{d\alpha}=0,\\&\left[\mathrm{H}\frac{dp}{d\alpha}+\left(\mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dq}{d\alpha}\right]\frac{d\beta}{dx}-2\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dq}{dx}\,\frac{d\beta}{d\alpha}=0.\end{aligned}\right\}\quad(95^{\text{bis}})$$

Cette transformation ne devra évidemment être faite que si les deux équations (95) ne sont pas immédiatement intégrables. Si l'une des deux est intégrable, on appliquera la transformation à l'autre équation seulement.

Dans le cas particulier $\mathrm{G}=0$, ces équations (95^{bis}) donnent :

$$\frac{d\beta}{dx}=0,$$

ou bien :

$$\beta=\varphi(\alpha).$$

Par conséquent, les deux fonctions arbitraires renferment la même quantité α. D'ailleurs, il résulte de (90^{bis}) que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ sont alors égales.

Si, entre les équations (95^{bis}), on élimine $\frac{dq}{dx}$, il vient, en ayant égard à la première des équations (94),

$$\left(\mathrm{N}\frac{dp}{d\alpha}-\left(\mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dy}{d\alpha}\right)\frac{d\beta}{dx}+2\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{d\beta}{d\alpha}=0.$$

De même, si l'on remplace dans la seconde équation (95^{bis}) $\frac{dq}{dx}$ par sa valeur, tirée de la première équation (94), et si l'on tient compte de la première équation (95^{bis}), on obtient :

$$\left(\left(\mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dp}{d\alpha}+\mathrm{L}\frac{dq}{d\alpha}+\mathrm{M}\frac{dy}{d\alpha}\right)\frac{d\beta}{dx}+2\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dp}{dx}\,\frac{d\beta}{d\alpha}=0.$$

On a alors les quatre équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned}&\left(\mathrm{H}\frac{dy}{d\alpha}+\mathrm{N}\frac{dq}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+2\sqrt{\mathrm{G}}=0,\\&\left(\mathrm{H}\frac{dp}{d\alpha}+\left(\mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dq}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+2\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dq}{dx}=0,\\&\left(\mathrm{N}\frac{dp}{d\alpha}-\left(\mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dy}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)-2\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dy}{dx}=0,\\&\left(\left(\mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}}\right)\frac{dp}{d\alpha}+\mathrm{L}\frac{dq}{d\alpha}+\mathrm{M}\frac{dy}{d\alpha}\right)\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)-2\sqrt{\mathrm{G}}\,\frac{dp}{dx}=0,\end{aligned}\right\}\quad(95^{\text{ter}})$$

lesquelles peuvent être employées au lieu des équations (94) et (95) dont elles se déduisent.

60. Ces équations sont surtout utiles dans des cas particuliers, lorsque la proposée est privée de quelques-uns de ses termes.

1° Si r n'existe pas dans l'équation (85), alors $H = 0$, $N = 0$, et l'on a :

$$2Ks + Lt + M = 0.$$

La première des équations (95ter) donne :

$$\left(\frac{dx}{d\alpha}\right) = 0.$$

On en tire $x = \psi(\beta)$, ou $\beta = \varphi(x)$, c'est-à-dire que *l'une des deux fonctions arbitraires ne renferme que la variable indépendante* x. C'est la variable qui se rapporte à la dérivée seconde de z qui n'existe pas dans la proposée.

2° Si s manque dans l'équation (85), on a $K = 0$, $N = 0$; l'équation est alors :

$$Hr + Lt + M = 0.$$

La troisième équation (95ter) nous donne :

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\frac{dy}{d\alpha} + 2\frac{dy}{dx} = 0,$$

d'où

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right) = -2\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{d\alpha}} = 2\frac{\partial\alpha}{\partial x}.$$

Cette équation permet de déterminer β lorsque l'on connaît la relation qui donne y en fonction de x, α.

3° Si $H = 0$, $K = 0$, on a :

$$Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

La deuxième équation (95ter) donne alors :

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)\frac{dq}{d\alpha} + 2\frac{dq}{dx} = 0.$$

On en déduira β en fonction de x, α, lorsque l'on connaîtra q en fonction de x, α.

4° Il est évident que si $K = 0$, $L = 0$, c'est-à-dire si l'on a :

$$Hr + M + N(rt - s^2) = 0,$$

on trouve en changeant y, p, r, respectivement en x, q, t, et réciproquement

$$\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) = -2\,\frac{\dfrac{dp}{dx}}{\dfrac{dp}{d\alpha}}.$$

Cette équation donnera β en fonction de x, α, si p est connu en fonction de ces mêmes quantités.

61. Proposons-nous maintenant, si cela est possible, *de trouver, au moyen des équations* (98) *et* (98^{bis}), *une fonction* V *de* x, y, z, p, q, *telle que sa différentielle totale* dV *soit nulle; en d'autres termes, cherchons s'il est possible de former une combinaison intégrable avec les premiers membres de ces équations.*

V étant une fonction de x, y, z, p, q, on a :

$$dV = \frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz + \frac{dV}{dp}dp + \frac{dV}{dq}dq = 0. \quad (99)$$

Multiplions les équations (98^{bis}) par des facteurs indéterminés λ, μ, ν; ajoutons, et identifions avec le second membre de (99), il viendra :

$$\begin{aligned}
&\frac{dV}{dx} = \lambda L - \mu\left(K \pm \sqrt{G}\right) - \nu p,\\
&\frac{dV}{dy} = -\lambda\left(K \mp \sqrt{G}\right) + \mu H - \nu q,\\
&\frac{dV}{dz} = \nu; \quad \frac{dV}{dp} = \lambda N, \quad \frac{dV}{dq} = \mu N.
\end{aligned}$$

Éliminant ensuite λ, μ, ν, on en déduit les deux équations simultanées du premier ordre :

$$\left.\begin{aligned}
&N\frac{dV}{dx} + Np\frac{dV}{dz} - L\frac{dV}{dp} + \left(K \pm \sqrt{G}\right)\frac{dV}{dq} = 0,\\
&N\frac{dV}{dy} + Nq\frac{dV}{dz} + \left(K \mp \sqrt{G}\right)\frac{dV}{dp} - H\frac{dV}{dq} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (100)$$

La fonction V doit donc satisfaire à deux équations primordinales simultanées. Or, on sait trouver la solution commune complète de ce système, lorsque cette solution existe (1re partie, nos 72 et suivants). Par conséquent, la question peut être considérée comme résolue.

62. Théorème. — *Si l'on connaît une fonction* V *vérifiant les deux équations* (100), *on satisfait à la proposée en posant :*

$$V = \text{const.}\ (*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (101)$$

En effet, on en déduit :

$$\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz} + r\frac{dV}{dp} + s\frac{dV}{dq} = 0,$$
$$\frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz} + s\frac{dV}{dp} + t\frac{dV}{dq} = 0.$$

Substituant dans (100) les valeurs de $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}$, tirées de ces dernières, on a :

$$-(L + Nr)\frac{dV}{dp} + \left(K \pm \sqrt{G} - Ns\right)\frac{dV}{dq} = 0,$$
$$\left(K \mp \sqrt{G} - Ns\right)\frac{dV}{dp} - (H + Nt)\frac{dV}{dq} = 0;$$

d'où, en éliminant $\frac{dV}{dp}, \frac{dV}{dq}$, on obtient :

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

63. Pour que le problème soit complétement résolu, il faut connaître une solution, contenant une fonction arbitraire, des équations (100); ou bien, il suffira de pouvoir déterminer deux solutions particulières u et v de ces équations. L'intégrale intermédiaire de la proposée (85) sera alors donnée par l'équation

$$u = \varphi(v),$$

φ désignant une fonction arbitraire. En intégrant cette dernière,

(*) α étant considérée comme constante dans les intégrations, on peut poser la constante de l'équation (101) égale à α, et prendre $V = \alpha$.

on obtiendra l'intégrale générale de (85) renfermant deux fonctions arbitraires.

64. Mais cela n'est pas nécessaire lorsque G est différent de zéro; car alors, on trouve deux intégrales intermédiaires :

$$u = \varphi(v), \quad u_1 = \psi(v_1),$$

desquelles on déduira p, q, qu'il suffit de substituer dans

$$dz = pdx + qdy.$$

65. **Remarque I.** — On peut remplacer l'une des deux équations (100) par la suivante :

$$H\frac{dV}{dx} + \left(K \pm \sqrt{G}\right)\frac{dV}{dy} + \left[Hp + \left(K \pm \sqrt{G}\right)q\right]\frac{dV}{dz} - M\frac{dV}{dp} = 0, \quad (102)$$

laquelle résulte de l'élimination de $\frac{dV}{dq}$ entre ces deux équations (100); on appliquera alors à cette équation (102), jointe à l'une des deux équations (100), ce que nous venons de dire du système (100).

66. **Remarque II.** — Lorsque $N = 0$, le système (100) se réduit à une seule équation. Car alors on a les deux équations

$$\left.\begin{aligned} -L\frac{dV}{dp} + \left(K \pm \sqrt{G}\right)\frac{dV}{dq} = 0, \\ \left(K \mp \sqrt{G}\right)\frac{dV}{dp} - H\frac{dV}{dq} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (103)$$

qui donnent

$$\frac{L}{K \mp \sqrt{G}} = \frac{K \pm \sqrt{G}}{H}.$$

Or, cette dernière relation est une identité, si $N = 0$.

Dans ce cas, on remplacera l'une des équations (100) ou (103) par l'équation (102).

Si, en outre, $G = 0$, les équations (100) et (102) deviennent :

$$\left.\begin{aligned} -L\frac{dV}{dp} + K\frac{dV}{dq} = 0, \\ H\frac{dV}{dx} + K\frac{dV}{dy} + (Hp + Kq)\frac{dV}{dz} - M\frac{dV}{dp} = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (104)$$

67. *Cas particuliers.* — Si $N = 0$, l'équation proposée devient :

$$Hr + 2Ks + Lt + M = 0. \quad (*)$$

Son intégration dépend du système :

$$\left.\begin{aligned} H\frac{dy}{dx} - K - \sqrt{G} &= 0, \\ H\frac{dp}{dx} + \left(K - \sqrt{G}\right)\frac{dq}{dx} + M &= 0, \\ \frac{dz}{dx} &= p + q\frac{dy}{dx}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (94^{bis})$$

que l'on déduit de (94) en y faisant $N = 0$; ou bien du système :

$$\left.\begin{aligned} H\left(\frac{dy}{dx}\right) - K + \sqrt{G} &= 0, \\ H\left(\frac{dp}{dx}\right) + \left(K + \sqrt{G}\right)\left(\frac{dq}{dx}\right) + M &= 0, \\ \left(\frac{dz}{dx}\right) &= p + q\left(\frac{dy}{dx}\right), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (95^{a})$$

lequel se déduit de (95) en posant $N = 0$.

Dans le premier système les variables indépendantes sont α, x, tandis que dans le second, elles sont β, x.

Si $G = K^2 - HL = 0$, ces deux systèmes se réduisent à un seul :

$$\left.\begin{aligned} H\frac{dy}{dx} - K &= 0, \\ H\frac{dp}{dx} + K\frac{dq}{dx} + M &= 0, \\ \frac{dz}{dx} &= p + q\frac{dy}{dx}. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94^{ter})$$

68. **Remarque I.** — Si H, K, L sont des fonctions de x, y, la

(*) Cette équation est celle qui a été traitée par Monge (n° 6). Les systèmes (94^{bis}) et (95^{a}) se réduisent facilement aux équations (16) et (17) de Monge.

première équation de chacun de ces trois systèmes s'intègre sans difficulté : elle donne dans les deux premiers systèmes α, β en fonction de x, y, et dans le troisième, α en fonction de x, y.

69. **Remarque II.** — Il est facile d'éviter l'intégration des différents systèmes (94bis), (95a) et (94ter) : il suffit, pour cela, de *chercher à former une combinaison intégrable de ces équations, et le problème est ramené à l'intégration des équations primordinales.*

En multipliant les équations (94bis) respectivement par λ, μ, ν et ajoutant, on obtient :

$$\left.\begin{aligned}\lambda\left(\mathrm{H}dy-\left(\mathrm{K}+\sqrt{\mathrm{G}}\right)dx\right)+\mu\left(\mathrm{H}dp+\left(\mathrm{K}-\sqrt{\mathrm{G}}\right)dq+\mathrm{M}dx\right)\\ +\nu\left(dz-pdx-qdy\right)=0,\end{aligned}\right\}\quad(105)$$

λ, μ, ν étant des fonctions de x, y, z, p, q. Si l'on intègre cette équation, on aura une équation primordinale $\mathrm{V}=\alpha$, laquelle peut être intégrée facilement, d'après ce que nous avons vu dans la première partie. Son intégrale générale sera représentée par les deux équations

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{U}&=0,\\ \frac{d\mathrm{U}}{d\gamma}&=0,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(106)$$

γ étant la constante arbitraire qui figure dans l'intégrale complète $\mathrm{U}=0$, dans laquelle on remplacera $\varphi(\gamma)$ par ψ, ψ étant une fonction de α, γ.

70. Cela posé, si nous supposons que α devienne variable et fonction de x, y, dans l'équation $\mathrm{U}=0$, et si aux équations (106) nous ajoutons l'équation :

$$\frac{d\mathrm{U}}{d\alpha}=0,\quad\ldots\ldots\quad(107)$$

les valeurs de p, q, déduites de $\mathrm{U}=0$, resteront les mêmes que si $\alpha=$ const.

71. Cherchons maintenant la condition nécessaire pour que $\mathrm{V}=\alpha$ satisfasse à l'équation

$$\mathrm{H}r+2\mathrm{K}s+\mathrm{L}t+\mathrm{M}=0,$$

lorsque α est variable. Nous aurons :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx}+\frac{dV}{dz}p+\frac{dV}{dp}r+\frac{dV}{dq}s&=\frac{d\alpha}{dx},\\ \frac{dV}{dy}+\frac{dV}{dz}q+\frac{dV}{dp}s+\frac{dV}{dq}t&=\frac{d\alpha}{dy}, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (108)$$

Or, $V=\alpha$ étant une intégrale de (105), on a :

$$\frac{dV}{dx}=-\lambda\left(K+\sqrt{G}\right)+\mu M-\nu p, \quad \frac{dV}{dy}=\lambda H-\nu q,$$
$$\frac{dV}{dz}=\nu, \quad \frac{dV}{dp}=\mu H, \quad \frac{dV}{dq}=\mu\left(K-\sqrt{G}\right).$$

Par conséquent, les équations (108) deviennent :

$$-\frac{\lambda}{\mu}\left(K+\sqrt{G}\right)+M+Hr+\left(K-\sqrt{G}\right)s=\frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{dx},$$
$$\frac{\lambda}{\mu}H+Ks+\left(K-\sqrt{G}\right)t=\frac{1}{\mu}\frac{d\alpha}{dy};$$

d'où, en éliminant $\frac{\lambda}{\mu}$,

$$Hr+2Ks+Lt+M=\frac{1}{\mu}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{K+\sqrt{G}}{H}\frac{d\alpha}{dy}\right)=-\frac{\lambda}{\mu}\frac{d\alpha}{dx}\left(\frac{dy}{dx}-\frac{K+\sqrt{G}}{H}\right).$$

L'équation $Hr+2Ks+Lt+M=0$, sera donc satisfaite, si l'on a :

$$\frac{dy}{dx}-\frac{K+\sqrt{G}}{H}=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (109)$$

Or, si l'on détermine, au moyen des équations (106), et (107), auxquelles on pourra joindre les relations

$$\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dz}p=0, \quad \frac{dU}{dy}+\frac{dU}{dz}q=0, \quad . \quad . \quad . \quad (110)$$

les quantités x, y, z, p, q, en fonction de α, γ, ψ, $\frac{d\psi}{d\gamma}$, $\frac{d\psi}{d\alpha}$, l'équation (109) servira à calculer ψ en fonction de α, γ. En remplaçant ψ dans (106) et (107), on aura l'intégrale de la proposée.

72. Il est facile de démontrer que, dans le cas qui nous occupe,

c'est-à-dire *lorsque* $N = 0$ (*), *l'équation* (109) *qui donne* ψ *en fonction de* α, γ, *est une équation biordinale linéaire; elle ne renferme que deux des dérivées partielles du second ordre de* ψ.

A cet effet, cherchons la valeur de $\frac{dy}{dx}$. Si nous prenons les dérivées par rapport à α, γ des équations (110), nous aurons :

$$\frac{dU}{dz}\frac{dp}{d\gamma} = -\frac{d\frac{dU}{dx}}{d\gamma} - p\frac{d\frac{dU}{dz}}{d\gamma},$$

ou bien :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dU}{dz}\frac{dp}{d\gamma} &= -\frac{d\frac{dU}{d\gamma}}{dx} - p\frac{d\frac{dU}{d\gamma}}{dz},\\
\frac{dU}{dz}\frac{dp}{d\alpha} &= -\frac{d\frac{dU}{d\alpha}}{dx} - p\frac{d\frac{dU}{d\alpha}}{dz},\\
\frac{dU}{dz}\frac{dq}{d\gamma} &= -\frac{d\frac{dU}{d\gamma}}{dx} - q\frac{d\frac{dU}{d\gamma}}{dz},\\
\frac{dU}{dz}\frac{dq}{d\alpha} &= -\frac{d\frac{dU}{d\alpha}}{dx} - q\frac{d\frac{dU}{d\alpha}}{dz}.
\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (111)$$

Si l'on prend de même les dérivées par rapport à α, γ, des équations

$$\frac{dU}{d\gamma} = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0,$$

il viendra, à cause des équations (111),

$$\frac{d^2U}{d\gamma^2} = \frac{dU}{dz}\left\{\frac{dp}{d\gamma}\frac{dx}{d\gamma} + \frac{dq}{d\gamma}\frac{dy}{d\gamma}\right\},$$
$$\frac{d^2U}{d\alpha d\gamma} = \frac{dU}{dz}\left(\frac{dp}{d\alpha}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dq}{d\alpha}\frac{dy}{d\alpha}\right).$$

(*) Ampère, *Mémoire sur l'intégration des équations aux différentielles partielles*, Journal de l'École polytechnique, 18e cahier, pp. 118 et suivantes.

Nous verrons plus loin comment l'on peut, dans le cas général où N est différent de zéro, trouver l'équation linéaire du second ordre qui détermine la fonction ψ.

De ces deux dernières on tire :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\gamma}}{\dfrac{dx}{d\gamma}} = \frac{\dfrac{dp}{d\gamma}\dfrac{d^2U}{d\alpha d\gamma} - \dfrac{dp}{d\alpha}\dfrac{d^2U}{d\gamma^2}}{\dfrac{dq}{d\alpha}\dfrac{d^2U}{d\gamma^2} - \dfrac{dq}{d\gamma}\dfrac{d^2U}{d\alpha d\gamma}},$$

et l'équation (109) se transforme en la suivante :

$$\left.\begin{aligned} &\left\{ H\frac{dp}{d\alpha} + \left(K + \sqrt{G}\right)\frac{dq}{d\alpha}\right\}\frac{d^2U}{d\gamma^2} \\ &-\left\{ H\frac{dp}{d\gamma} + \left(K + \sqrt{G}\right)\frac{dq}{d\gamma}\right\}\frac{d^2U}{d\alpha d\gamma} = 0. \ (*) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (112)$$

Cette équation renferme deux seulement des dérivées partielles du second ordre de la fonction ψ de α, γ, et elle est linéaire par rapport à ces dérivées.

En effet, les équations

$$U = 0, \quad \frac{dU}{d\gamma} = 0, \quad \frac{dU}{d\alpha} = 0,$$

nous donneront x, y, z, en fonction de α, γ, ψ, $\frac{d\psi}{d\gamma}$, $\frac{d\psi}{d\alpha}$; de plus, les valeurs de p, q, déduites des équations (110), seront seulement des fonctions de x, y, z, α, γ, ψ. Par conséquent, les dérivées relatives à α, γ, de ces quantités p et q seront des fonctions de x, y, z, α, γ, ψ, $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{d\gamma}$, et si l'on y remplace x, y, z, par leurs valeurs, les dérivées de p, q, ne renfermeront que α, γ, ψ, $\frac{d\psi}{dx}$, $\frac{d\psi}{d\gamma}$. Par suite, les dérivées du second ordre de ψ ne peuvent entrer que dans $\frac{d^2U}{d\gamma^2}$, $\frac{d^2U}{dxd\gamma}$, et, par conséquent, on ne peut avoir dans l'équation (112) que les dérivées $\frac{d^2\psi}{d\gamma^2}$, $\frac{d^2\psi}{dxd\gamma}$: en outre, ces dérivées s'y trouveront seulement au premier degré.

(*) Ampère a démontré que cette équation peut être remplacée par

$$\frac{d^2U}{d\gamma^2} + 2\mu\sqrt{G}\left(\frac{dq}{d\alpha}\frac{d^2U}{d\gamma^2} - \frac{dq}{d\gamma}\frac{d^2U}{d\alpha d\gamma}\right) = 0;$$

lorsque $G = 0$, elle se réduit à

$$\frac{d^2U}{d\gamma^2} = 0.$$

Ampère, *Mémoire sur l'intégration*, etc., Journal de l'École polytechnique, 18e cahier, p. 126.

73. Lorsque $H = 0$, $N = 0$, l'équation à intégrer est :

$$2Ks + Lt + M = 0.$$

Le premier système d'équations simultanées (100), se réduit à

$$-L\frac{dV}{dp} + 2K\frac{dV}{dq} = 0,$$
$$2K\frac{dV}{dy} + 2Kq\frac{dV}{dz} - M\frac{dV}{dp} = 0;$$

l'autre système, dans lequel on prend $\sqrt{G}$ avec le signe —, devient illusoire.

Mais alors on peut traiter ce cas directement, en substituant dans l'équation proposée au lieu de s la valeur :

$$s = \frac{dq}{dx} - t\frac{dy}{dx}.$$

74. Si $L = 0$, $N = 0$, l'équation devient :

$$Hr + 2Ks + M = 0.$$

Les deux systèmes sont illusoires; mais on peut ramener ce cas au précédent, en remplaçant x, y, p, q, r, par y, x, q, p, t, et le traiter directement.

V.

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE D'AMPÈRE. — MÉTHODE DE LA VARIATION DES CONSTANTES ARBITRAIRES.

75. La théorie précédente nous donne le moyen de trouver l'intégrale générale dans le cas particulier où $N = 0$. Par une étude approfondie des travaux d'*Ampère*, M. *Imschenetsky* a obtenu des formules générales conduisant à l'intégrale primitive de l'équation biordinale considérée par *Ampère*. Dans ce but, il s'appuie seulement sur l'hypothèse de l'existence des intégrales partielles des équations biordinales, et il applique à ces intégrales la théorie de la *variation des constantes arbitraires*. La méthode

s'applique non-seulement au cas considéré par *Ampère*, mais encore, comme nous le verrons, au cas où les équations (94) ne donnent lieu à aucune combinaison intégrable, et à celui où il y a deux combinaisons intégrables.

76. Proposons-nous d'abord de *trouver l'intégrale générale de l'équation biordinale*

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

connaissant une quelconque de ses intégrales partielles renfermant trois constantes arbitraires.

Soit cette intégrale partielle

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \psi), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (113)$$

α, γ, ψ étant trois constantes arbitraires. Les valeurs

$$p = \omega', \quad q = \omega_{,}, \quad r = \omega'', \quad s = \omega'_{,}, \quad t = \omega_{,,}, \ (^*)$$

que l'on en déduit, étant substituées, ainsi que z, dans (85), doivent donner une identité.

Supposons maintenant que ψ soit une fonction arbitraire de α, γ, ces dernières étant elles-mêmes des fonctions de x, y, que nous déterminerons de manière que p, q, conservent les mêmes valeurs que dans le cas où α, γ, ψ sont des constantes. On obtient alors :

$$p = \omega' + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial\omega}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dx},$$

$$q = \omega_{,} + \frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial\omega}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dy},$$

(*) Les notations $\omega', \omega_{,}$ ont ici la même signification que nous avons donnée ci-dessus à u', u_1 (p. 118, seconde note) :

$$\omega' = \frac{d\omega}{dx}, \quad \omega_{,} = \frac{d\omega}{dy}.$$

Quant aux notations $\omega'', \omega'_{,}, \omega_{,,}$ elles signifient respectivement :

$$\omega'' = \frac{d^2\omega}{dx^2}, \quad \omega'_{,} = \frac{d^2\omega}{dxdy}, \quad \omega_{,,} = \frac{d^2\omega}{dy^2}.$$

en posant

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=\frac{d\omega}{d\alpha}+\frac{d\omega}{d\psi}\frac{d\psi}{d\alpha},$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\gamma}=\frac{d\omega}{d\gamma}+\frac{d\omega}{d\psi}\frac{d\psi}{d\gamma}.$$

Il est évident que si α et γ sont déterminées en fonction de x, y, par les deux équations suivantes :

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\omega}{\partial\gamma}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

nous aurons, comme précédemment,

$$p=\omega',\quad q=\omega, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (115)$$

77. Cherchons maintenant à quelle condition ψ doit satisfaire, pour que les équations (115) et (114) représentent l'intégrale générale de (85).

Nous aurons pour les dérivées du second ordre de z :

$$r=\omega''+\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dx},$$
$$s=\omega'_{,}+\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dy}=\omega'_{,}+\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dx},$$
$$t=\omega_{,,}+\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dy};$$

elles se réduisent à

$$r=\omega''+h,\quad s=\omega'_{,}+k=\omega'_{,}+k',\quad t=\omega_{,,}+l, \quad (116)$$

si l'on pose :

$$h=\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dx},$$
$$k=\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dy},$$
$$k'=\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dx},$$
$$l=\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dy}.$$

78. On peut donner aux quantités h, k, k', l, une autre forme de laquelle on déduira facilement que $k = k'$. En effet, en prenant la dérivée par rapport à x de la première équation (114), on trouve

$$d\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\Big/dx + \partial\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\Big/\partial\alpha\,\frac{d\alpha}{dx} + \partial\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\Big/\partial\gamma\,\frac{d\gamma}{dx} = 0.$$

Or, dans le premier terme les différentiations par rapport à x et α, s'effectuant comme par rapport à des variables indépendantes, on a :

$$d\cdot\frac{\partial\omega}{\partial\alpha}\Big/dx = \partial\cdot\frac{d\omega}{dx}\Big/\partial\alpha = \frac{\partial\omega'}{\partial\alpha};$$

par suite, il vient :

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dx} = 0.$$

De même, de la seconde équation (114) on tire :

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{d\gamma}{dx} = 0.$$

Ces mêmes équations (114), dérivées par rapport à y, donnent :

$$\frac{\partial\omega_,}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dy} = 0,$$

$$\frac{\partial\omega_,}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{d\alpha}{dy} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{d\gamma}{dy} = 0.$$

De ces quatre dernières équations, on déduit :

$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{D}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\right\},$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{1}{D}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{\partial\omega_,}{\partial\gamma} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\omega_,}{\partial\alpha}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{1}{D}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\right\},$$

$$\frac{d\gamma}{dy} = \frac{1}{D}\left\{\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial\gamma}\frac{\partial\omega_,}{\partial\alpha} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\omega_,}{\partial\gamma}\right\},$$

où l'on pose :

$$D = \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2.$$

Par conséquent,

$$h = -\frac{1}{D}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2}\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\right)^2\right],$$

$$k = k' = -\frac{1}{D}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma} + \frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2}\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right],$$

$$l = -\frac{1}{D}\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\right)^2 - 2\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma} + \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2}\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2\right];$$

d'où

$$hl - k^2 = \frac{1}{D}\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma} - \frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2.$$

En remplaçant dans l'équation (85), z, p, q, r, s, t, par leurs valeurs (113), (115) et (116), on obtient (*) :

$$\mathrm{F}(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'' + h, \omega_{,} + k, \omega_{,,} + l) = \mathrm{F}(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'', \omega_{,}, \omega'')$$
$$+ (\mathrm{H} + \mathrm{N}\omega_{,,})\,h + 2(\mathrm{K} - \mathrm{N}\omega_{,})\,k + (\mathrm{L} + \mathrm{N}\omega'')\,l + \mathrm{N}(hl - k^2).$$

Mais le premier terme du second membre étant nul, puisque

(*) On a, en effet, par la formule de Taylor, en désignant par F le premier membre de (85) :

$$\mathrm{F}(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'' + h, \omega_{,} + k, \omega_{,,} + l) = \mathrm{F}(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'', \omega_{,}, \omega_{,,})$$
$$+ h\frac{d\mathrm{F}}{d\omega''} + k\frac{d\mathrm{F}}{d\omega_{,}} + l\frac{d\mathrm{F}}{d\omega_{,,}} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega''^2} + hk\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega''d\omega_{,}} + hl\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega''d\omega_{,,}}$$
$$+ kl\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega_{,}d\omega_{,,}} + \frac{k^2}{2}\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega_{,}^2} + \frac{l^2}{2}\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega_{,,}^2} + \text{etc.}$$

Or, en vertu de (85), on a :

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\omega''} = \mathrm{H} + \mathrm{N}\omega_{,,}, \qquad \frac{d\mathrm{F}}{d\omega_{,}} = 2(\mathrm{K} - \mathrm{N}\omega_{,}),$$
$$\frac{d\mathrm{F}}{d\omega_{,,}} = \mathrm{L} + \mathrm{N}\omega'', \quad -\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega_{,}^2} = \frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega''d\omega_{,,}} = \mathrm{N},$$
$$\frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega''^2} = \frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega''d\omega_{,}} = \frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega_{,}d\omega_{,,}} = \frac{d^2\mathrm{F}}{d\omega_{,,}^2} = 0.$$

Toutes les dérivées suivantes sont nulles.

l'on admet que l'équation (85) est vérifiée, quelles que soient les valeurs de α, γ, ψ, on en conclut :

$$\left.\begin{aligned} &F(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'' + h, \omega'_{,} + k, \omega_{,,} + l) = \\ &= (H + N\omega_{,,})\, h + 2\,(K - N\omega'_{,})\, k + (L + N\omega'')\, l + N\,(hl - k^2). \end{aligned}\right\} (117)$$

Par conséquent, dans le cas actuel, où α, γ sont des fonctions de x, y, les équations (115) et (114) représenteront l'intégrale de (85), si la fonction ψ est déterminée de manière que le second membre de cette dernière équation (117) soit nul, c'est-à-dire de manière que l'on ait :

$$(H + N\omega_{,,})\, h + 2\,(K - N\omega'_{,})\, k + (L + N\omega'')\, l + N\,(hl - k^2) = 0.$$

Or, en remplaçant dans cette dernière h, k, l, par leurs valeurs, on trouve une équation de la forme

$$R\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + 2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} + T\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} + U = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

en posant

$$\left.\begin{aligned} R &= -(H + N\omega_{,,})\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\right)^2 - 2\,(K - N\omega'_{,})\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma} - (L + N\omega'')\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\right)^2, \\ S &= (H + N\omega_{,,})\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} + (K - N\omega'_{,})\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma} + \frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right) \\ &\qquad + (L + N\omega'')\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}, \\ T &= -(H + N\omega_{,,})\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\right)^2 - 2\,(K - N\omega'_{,})\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha} - (L + N\omega'')\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2, \\ U &= N\left(\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma} - \frac{\partial\omega'}{\partial\gamma}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2. \end{aligned}\right\} (119)$$

79. Il est facile de s'assurer que l'équation (118) est linéaire par rapport aux dérivées du second ordre

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}, \quad \frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma}, \quad \frac{d^2\psi}{d\gamma^2},$$

et que ses coefficients ne renferment que les variables α, γ, ψ, et les dérivées du premier ordre $\frac{d\psi}{d\alpha}, \frac{d\psi}{d\gamma}$.

En effet, les dérivées $\frac{d^2\psi}{dx^2}, \frac{d^2\psi}{dxdy}, \frac{d^2\psi}{dy^2}$ n'entrent respectivement que dans les trois dérivées $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}, \frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}$, et elles ne s'y trouvent qu'au premier degré. Quant aux coefficients R, S, T, U, ils contiendront x, y, qui peuvent être éliminés au moyen des relations (114).

En résumé, la théorie précédente permet, *quand on connaît une intégrale partielle de* (85), *de transformer cette équation non linéaire en une autre linéaire.*

80. **Remarque.** — Cette méthode de la variation des constantes arbitraires permet de trouver une infinité de transformations en en vertu desquelles l'équation (85) conserve sa forme.

En effet, si

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \psi),$$

ne représente pas une intégrale partielle, on peut néanmoins effectuer les opérations précédentes : seulement, dans ce cas, nous aurons

$$F(x, y, \omega, \omega', \omega_{,}, \omega'', \omega'_{,}, \omega_{,,}) = W \gtrless 0.$$

On a alors, au lieu de (118), l'équation

$$R\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2} + 2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} + T\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} + W\left[\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha^2}\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} - \left(\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma}\right)^2\right] + U = 0. \quad (120)$$

Cette équation a la même forme que la proposée (85), quant aux dérivées du second ordre de ψ, puisque le coefficient de W se réduira à

$$D = a\frac{d^2\psi}{d\alpha^2} + b\frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma} + c\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} + d\left\{\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} - \left(\frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma}\right)^2\right\} + e,$$

W ne renfermant que $\alpha, \gamma, \psi, \frac{d\psi}{dx}, \frac{d\psi}{dy}$.

81. Supposons que les équations (94) d'*Ampère* donnent une combinaison intégrable, dont nous représentons l'intégrale par

$$f(x, y, z, p, q) = \alpha.$$

Cette équation du premier ordre sera une intégrale première ou intermédiaire de la proposée. Comme nous l'avons déjà remar-

qué, on pourra déterminer, par la méthode de *Jacobi*, l'intégrale complète

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \psi),$$

de cette dernière : on aura ainsi l'intégrale partielle primitive de (85). De cette intégrale partielle on pourra déduire l'intégrale générale par la *variation des constantes arbitraires*. Nous venons de voir que ψ sera déterminée en fonction de α, γ, par une équation biordinale linéaire. Mais la quantité α représente l'un des arguments des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale de (85); par conséquent, puisque cette dernière doit être exprimée en fonction de ψ, il en résulte que *l'une des fonctions arbitraires qui entrent dans* ψ *doit avoir pour argument* α. Or, on sait (n° 60) que, dans ce cas, l'équation biordinale qui détermine ψ ne doit pas contenir la dérivée $\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}$. Mais $\frac{d^2\psi}{dx^2}$ entre nécessairement dans $\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}$, et par suite, dans (118), à moins que l'on n'ait $R = 0$.

82. De même, si l'on peut trouver une combinaison intégrable des équations (95) :

$$F(x, y, z, p, q) = \beta,$$

laquelle donnera l'intégrale complète

$$z = \omega(x, y, \beta, \gamma, \psi),$$

on verra que ψ étant supposée une fonction de β, γ, l'équation biordinale linéaire qui la détermine ne peut renfermer $\frac{d^2\psi}{d\gamma^2}$; par suite, $T = 0$.

83. Si l'on connaît une combinaison intégrable de chacun des deux systèmes (94) et (95) :

$$f = \alpha, \quad F = \beta,$$

on pourra en déduire l'intégrale partielle primitive

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \psi).$$

On verra que ψ étant supposée fonction de α, β, sera déterminée par une équation biordinale linéaire de la forme (118) dans laquelle on remplace γ par β. Les arguments des deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale de (85) étant alors α, β, il en

sera de même pour ψ. Par conséquent, l'équation biordinale en ψ ne pourra contenir ni $\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}$ ni $\frac{d^2\psi}{d\beta^2}$, ce qui exige que l'on ait en même temps

$$R = 0, \quad T = 0.$$

84. Enfin, si $G = K^2 - HL + MN = 0$, les deux systèmes (94) et (95) sont identiques, et ne donnent qu'une combinaison intégrable :

$$f = \alpha ;$$

d'où

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \psi),$$

sera l'intégrale partielle primitive de (85). L'intégrale générale z s'exprime en fonction de l'intégrale générale ψ, et des deux fonctions arbitraires qui doivent se trouver dans ψ. Mais les arguments de ces fonctions arbitraires étant égaux à α, dans z comme dans ψ, l'équation biordinale qui détermine ψ ne peut contenir ni $\frac{d^2\psi}{d\alpha^2}$, ni $\frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma}$. Par conséquent $R = 0$, $S = 0$.

85. Ainsi donc, l'équation qui détermine ψ aura l'une des quatre formes suivantes :

$$\left.\begin{aligned} 2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} + T\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} + U = 0, \\ 2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta\partial\gamma} + R\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} + U = 0, \\ 2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} + U = 0, \\ T\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} + U = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (121)$$

86. Si $N = 0$, dans la proposée, on déduit de (119) $U = 0$. Les équations (121) deviennent alors :

$$\left.\begin{aligned} 2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} + T\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = 0, \\ 2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\beta\partial\gamma} + R\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = 0, \\ S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = 0, \\ T\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (122)$$

La dernière de ces équations, correspondant à $G = 0$, a déjà été obtenue (n° 72, note) par la méthode d'*Ampère*. Les autres seraient très-difficiles à obtenir par cette méthode.

87. **Remarque I.** — Les équations

$$S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} = 0, \quad T\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = 0,$$

renferment deux facteurs dont chacun peut être nul. La valeur de ψ peut être obtenue au moyen des seconds facteurs qui renferment uniquement les dérivées du second ordre de ψ. Cependant on pourrait, dans certains cas, déduire ψ des premiers facteurs S et T, qui renferment les dérivées du premier ordre. En général, on ne considère que les seconds facteurs.

88. **Remarque II.** — Lorsque $G = 0$, et que des deux systèmes (94) et (95) on déduit l'intégrale partielle

$$z = \omega(x, y, \alpha, \gamma, \psi),$$

on obtient l'intégrale générale en joignant à cette dernière les trois équations

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\gamma} = 0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = 0,$$

dont la dernière détermine ψ en fonction de α, γ.

Si G est différent de zéro, et si des deux mêmes systèmes on déduit l'intégrale partielle

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \psi),$$

on aura l'intégrale générale, en y joignant les trois équations

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = 0.$$

89. On peut encore ramener les formules (119) à une forme plus simple pour les applications. En effet, il est facile de remarquer que R et T peuvent être décomposés en deux facteurs que l'on obtiendra en résolvant l'équation du second degré :

$$m^2 + \frac{2(K - N\omega')}{H + N\omega''}m + \frac{L + N\omega''}{H + N\omega''} = 0.$$

De cette équation on tire :

$$m = \frac{-K + N\omega'_{,} \pm \sqrt{(K - N\omega'_{,})^2 - (H + N\omega_{,,})(L + N\omega'')}}{H + N\omega_{,,}}.$$

Si l'on pose :

$$P = K^2 - HL - N\left[H\omega'' + 2K\omega'_{,} + L\omega_{,,} + N(\omega''\omega_{,,} - \omega'^2_{,})\right],$$

et si l'on observe que ω satisfaisant à l'équation (85), on a :

$$H\omega'' + 2K\omega'_{,} + L\omega'' + M + N(\omega''\omega_{,,} - \omega'^2_{,}) = 0,$$

il vient :

$$P = K^2 - HL + MN.$$

Par conséquent,

$$m = \frac{-K + N\omega'_{,} \pm \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}.$$

On trouve alors :

$$\left.\begin{aligned}
R &= -(H + N\omega_{,,})\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\right)^2 \left[\frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}} + \frac{K - N\omega'_{,} + \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}\right]\left[\frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}} + \frac{K - N\omega'_{,} - \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}\right], \\
S &= (H + N\omega_{,,})\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}\left[\frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}}\cdot\frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}} + \frac{K - N\omega'_{,}}{H + N\omega_{,,}}\left(\frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}} + \frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\gamma}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\gamma}}\right) + \frac{L + N\omega''}{H + N\omega_{,,}}\right], \\
T &= -(H + N\omega_{,,})\left(\frac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}\right)^2 \left[\frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}} + \frac{K - N\omega'_{,} + \sqrt{G}}{H + N\omega''}\right]\left[\frac{\dfrac{\partial\omega'}{\partial\alpha}}{\dfrac{\partial\omega_{,}}{\partial\alpha}} + \frac{K - N\omega'_{,} - \sqrt{G}}{H + N\omega_{,,}}\right].
\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

VI.

APPLICATION DE LA MÉTHODE D'AMPÈRE A DIFFÉRENTS EXEMPLES.

90. *Ampère* intègre les équations primordinales par la méthode de *Lagrange*, ce qui l'entraîne, dans la plupart des cas, à des calculs très-compliqués, sinon par leur longueur, du moins par les artifices qu'il est forcé d'employer. Nous avons toujours appliqué la méthode de *Jacobi*, la seule qui, à notre avis, puisse conduire immédiatement et par des opérations simples à la solution du problème. En outre, au lieu d'intégrer, par une voie plus ou moins détournée, comme *Ampère*, les équations des caractéristiques, nous avons cherché l'intégrale commune aux équations primordinales (100) et (102).

91. *Application* I. — Soit à intégrer l'équation biordinale

$$x^4 r - 4x^2 qs + 4q^2 t + 2px^3 = 0.$$

Les équations (100) et (102) nous donnent le système suivant :

$$2q\frac{dV}{dp} + x^2\frac{dV}{dq} = 0,$$

$$x^2\frac{dV}{dx} - 2q\frac{dV}{dy} + (x^2 p - 2q)\frac{dV}{dz} - 2px\frac{dV}{dp} = 0.$$

Or, en y faisant

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = q_3, \quad p = q_4, \quad q = q_5,$$

$$\frac{dV}{dx} = p_1, \quad \frac{dV}{dy} = p_2, \quad \frac{dV}{dz} = p_3, \quad \frac{dV}{dp} = p_4, \quad \frac{dV}{dq} = p_5,$$

nous aurons les deux équations :

$$F_1 = 2q_5 p_4 + q_1^2 p_3 = 0,$$

$$F_2 = q_1^2 p_1 - 2q_5 p_2 + (q_1^2 q_4 - 2q_5)\, p_3 - 2q_1 q_4 p_4 = 0,$$

que nous avons déjà traitées dans la première partie (n° 84). Nous avons obtenu

$$V = -\frac{aq_1^2q_4}{2} + \frac{aq_5^2}{2} + \beta;$$

par suite, l'équation $V = 0$ nous donne :

$$q_1^2q_4 - q_5^2 = 2\alpha,$$

ou bien

$$x^2p - q^2 = 2\alpha.$$

De cette dernière équation qui est du premier ordre, on déduit (1re partie, n° 50) :

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \varphi(\gamma);$$

par conséquent, l'intégrale générale de la proposée sera représentée par les équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} z &= \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \psi = \omega, \\ \frac{\partial\omega}{\partial\gamma} &= y - \frac{2\gamma}{x} + \frac{d\psi}{d\gamma} = 0, \\ \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} &= -\frac{2}{x} + \frac{d\psi}{d\alpha} = 0, \\ \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} &= -\frac{2}{x} + \frac{d^2\psi}{d\gamma^2} = 0. \end{aligned}\right\}$$

La fonction ψ est donc déterminée par l'équation

$$\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} = \frac{d\psi}{d\alpha}.$$

Par suite,

$$\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\varphi\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right)d\theta;$$

on en déduit :

$$\frac{d\psi}{d\gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\varphi'\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right)d\theta,$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\varphi'\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right)\theta d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2}\varphi''\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right)d\theta.$$

L'intégrale générale est donnée par les équations :

$$z = \gamma y - \frac{2\alpha + \gamma^2}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \varphi\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right) d\theta,$$

$$y - \frac{2\gamma}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \varphi'\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right) d\theta = 0,$$

$$-\frac{2}{x} + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \varphi''\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right) d\theta = 0. \ (*)$$

92. *Application* II. — L'équation biordinale

$$r + 2(q - x)s + (q - x)^2 t - q = 0,$$

nous donne, comme la précédente, les deux équations primordinales simultanées suivantes :

$$\frac{dV}{dq} - (q - x)\frac{dV}{dp} = 0,$$

$$\frac{dV}{dx} + (q - x)\frac{dV}{dy} + (p + q^2 - qx)\frac{dV}{dz} + q\frac{dV}{dp} = 0.$$

La solution commune à ces deux équations étant :

$$V = p + \frac{q^2}{2} - qx + \alpha,$$

on trouve, en posant $V = 0$, l'intégrale intermédiaire

$$p + \frac{q^2}{2} - qx + \alpha = 0.$$

Or, l'intégrale complète de cette dernière est (1re partie, n° 51) :

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \psi;$$

de sorte que l'intégrale générale de la proposée sera représentée par les quatre équations suivantes :

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \psi = \omega,$$

(*) Cet équation n'est autre que la dérivée seconde de la première, prise par rapport à γ.

$$\frac{\partial\omega}{\partial\gamma} = y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{d\psi}{d\gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = -x + \frac{d\psi}{d\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = -x + \frac{d^2\psi}{d\gamma^2} = 0.$$

Cette dernière, combinée avec la précédente, donne l'équation

$$\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} = \frac{d\psi}{d\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \varphi\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right) d\theta.$$

L'intégrale générale de la proposée est donc représentée par les trois équations suivantes :

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \varphi\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right) d\theta,$$

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \varphi'\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right) d\theta = 0,$$

$$-x + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\theta^2} \varphi''\left(\gamma + 2\theta\sqrt{\alpha}\right) d\theta = 0.$$

93. *Application* III. — L'équation biordinale

$$x^2 r + 2x^2 s + \left(x^2 - \frac{b^2}{q^2 x^2}\right) t - 2z = 0,$$

nous donne de la même manière l'intégrale intermédiaire :

$$x^2 p + x^2 q - 2xz - b \log q + 2b \log x = \alpha.$$

L'intégrale complète de cette dernière étant (1re partie, n° 71) :

$$z = \gamma x^2 y - \gamma x^3 - \frac{\alpha + b \log \gamma}{3x} + x^2 \varphi(\gamma),$$

l'intégrale générale de la proposée sera représentée par les équations :

$$z = \gamma x^2 y - \gamma x^3 - \frac{\alpha + b \log \gamma}{3x} + x^2 \psi = \omega,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\gamma} = x^2 y - x^3 - \frac{b}{3\gamma x} + x^2 \frac{d\psi}{d\gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = -\frac{1}{3x} + x^2 \frac{d\psi}{d\alpha} = 0.$$

Quant à l'équation biordinale qui détermine la fonction ψ, nous pouvons la trouver en appliquant les formules de M. *Imschenetsky*.

Nous aurons, en vertu des équations précédentes,

$$p = \omega' = 2\gamma xy - 3\gamma x^2 + \frac{\alpha + b\log\gamma}{3x^2} + 2x\psi,$$

$$q = \omega_, = \gamma x^2.$$

Par suite,

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = \frac{1}{3x^2} + 2x\frac{d\psi}{d\alpha},$$

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} = 2xy - 3x^2 + \frac{b}{3\gamma x^2} + 2x\frac{d\psi}{d\gamma},$$

$$\frac{\partial\omega'_,}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\omega_,}{\partial\gamma} = x^2.$$

En remplaçant $\frac{d\psi}{dx}$ et $\frac{d\psi}{d\gamma}$ par leurs valeurs, on obtient :

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial\omega'}{\partial\gamma} = -x^2 + \frac{b}{\gamma x^2};$$

par suite, les formules (119) nous donnent :

$$R = 0, \quad S = \frac{b}{\gamma x^2}, \quad T = \frac{1}{x^2}.$$

L'équation (118) devient alors

$$\frac{2b}{\gamma}\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} - \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = 0.$$

Mais, on a :

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\gamma} = x^2\frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma}, \qquad \frac{\partial^2\omega}{\partial\gamma^2} = x^2\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} + \frac{b}{3\gamma^2 x},$$

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \frac{1}{3x^3}.$$

Par conséquent, l'équation biordinale en ψ est :

$$\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} - \frac{2b}{\gamma}\frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma} + \frac{b}{\gamma^2}\frac{d\psi}{d\gamma} = 0.$$

C'est l'équation qu'*Ampère* a trouvée (*) par une autre méthode qui a exigé de lui de très-longs calculs.

Or, si l'on pose $\log \gamma = \beta$, ou $\gamma = e^\beta$, on a pour représenter l'intégrale générale de la proposée les quatre équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} z &= e^\beta x^2 y - e^\beta x^3 - \frac{b\beta + \alpha}{3x} + x^2\psi, \\ e^\beta (x^2 y - x^3) - \frac{b}{3x} + x^2\frac{d\psi}{d\beta} &= 0, \\ -\frac{1}{3x} + x^2\frac{d\psi}{d\alpha} &= 0, \\ \frac{d^2\psi}{d\beta^2} - 2b\frac{d^2\psi}{d\alpha d\beta} + b\frac{d\psi}{d\alpha} - \frac{d\psi}{d\beta} &= 0. \end{aligned}\right\}$$

94. *Application* IV. — L'équation biordinale

$$r + 2qs + (q^2 - x^2)\,t - q = 0,$$

admet pour intégrale première

$$p + \frac{q^2}{2} - qx + \alpha = 0.$$

L'intégrale complète de cette dernière est (1re partie, n° 51) :

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \varphi(\gamma).$$

L'intégrale générale de la proposée est représentée par le système suivant :

$$z = \gamma y + \frac{\gamma x^2 - \gamma^2 x}{2} - \alpha x + \psi,$$

(*) Ampère, *Mémoire sur l'intégration*, etc., Journal de l'École polytechnique, 18e cahier, p. 151.

$$y + \frac{x^2}{2} - \gamma x + \frac{d\psi}{d\gamma} = 0,$$

$$- x + \frac{d\psi}{d\alpha} = 0.$$

La fonction ψ est déterminée par l'équation biordinale

$$\frac{d^2\psi}{d\gamma^2} + 2\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d^2\psi}{d\alpha d\gamma} - \frac{d\psi}{d\alpha} = 0.$$

95. *Application* V. — L'équation biordinale

$$2ps + t - p = 0,$$

nous donne, en remplaçant s par sa valeur

$$s = \frac{dq}{dx} - t\frac{dy}{dx},$$

et égalant à zéro le coefficient de t et le terme indépendant :

$$\left.\begin{aligned} 2p\frac{dq}{dx} - p &= 0, \\ 2p\frac{dy}{dx} - 1 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (124)$$

On doit joindre à ces deux équations la suivante :

$$dz = pdx + qdy.$$

La première des équations (124) donne :

$$2\frac{dq}{dx} - 1 = 0;$$

d'où

$$2q = x + \alpha.$$

On tire de là (1re partie, n° 40) :

$$2p = y + a_1.$$

Par conséquent,

$$2dz = (y + a_1)\,dx + (x + \alpha)\,dy;$$

d'où

$$2z = xy + a_1x + \alpha y + \varphi(a_1).$$

L'intégrale générale de la proposée est donc donnée par les équations suivantes :

$$2z = xy + a_1 x + \alpha y + \psi = \omega,$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial a_1} = x + \frac{d\psi}{da_1} = 0,$$
$$\frac{\partial \omega}{\partial \alpha} = y + \frac{d\psi}{d\alpha} = 0.$$

L'équation biordinale qui détermine la fonction ψ peut être obtenue de la manière suivante :

De l'équation

$$\omega = xy + a_1 x + \alpha y + \psi,$$

on tire successivement :

$$\omega' = y + a_1, \qquad \omega_1 = x + \alpha;$$
$$\frac{\partial \omega'}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial a_1} = 1, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha_1} = 0;$$

on a, en outre,

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial a_1 \partial \alpha} = \frac{d^2\psi}{da_1 d\alpha}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial a_1^2} = \frac{d^2\psi}{da_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha^2} = \frac{d^2\psi}{d\alpha^2}.$$

Des formules (119) on déduit :

$$R = 0, \quad S = p, \quad T = -1;$$

par conséquent, l'équation (118) devient :

$$2p \frac{\partial^2 \omega}{\partial a_1 \partial \alpha} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial a_1^2} = 0.$$

En remplaçant $\frac{\partial^2 \omega}{\partial a_1 \partial \alpha}$ et $\frac{\partial^2 \omega}{\partial a_1^2}$, on trouve pour l'équation qui détermine ψ :

$$2p \frac{d^2\psi}{da_1 d\alpha} + \frac{d^2\psi}{da_1^2} = 0.$$

96. *Application* VI. — L'équation biordinale

$$zs + \frac{zt}{q^2} + pq = 0,$$

nous donne, comme précédemment, les équations

$$z\frac{dq}{dx} + pq = 0,$$

$$-\frac{1}{q^2} + \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dz}{dx} - p - q\frac{dy}{dx} = 0.$$

On en tire facilement :

$$zq = x + \beta,$$

ou

$$z\frac{dz}{dy} = x + \beta.$$

En intégrant cette dernière par rapport à y, et remplaçant la constante par $\varphi(x)$, il vient

$$\frac{z^2}{2} = (x + \beta)\, y + \varphi(x).$$

L'intégrale de la proposée est donc donnée par les équations :

$$\frac{z^2}{2} = (x + \beta)\, y + \psi,$$

$$y + \frac{d\psi}{d\beta} = 0,$$

dans lesquelles ψ est déterminée par l'équation

$$q^2\frac{dy}{dx} - 1 = 0, \quad \text{ou} \quad (x + \beta)^2\frac{dy}{dx} - z^2 = 0.$$

A cause des équations précédentes, cette équation donne :

$$\frac{d^2\psi}{dx\,d\beta} - \frac{2}{x + \beta}\frac{d\psi}{d\beta} + \frac{2\psi}{(x + \beta)^2} = 0,$$

ou

$$(x + \beta)^2\frac{d^2\psi}{dx\,d\beta} - 2(x + \beta)\frac{d\psi}{d\beta} + 2\psi = 0.$$

97. *Application* VII. — Soit encore l'équation biordinale

$$qr + (p + x)\, s + yt + y(rt - s^2) + q = 0.$$

On trouve les deux systèmes suivants :

$$\left.\begin{aligned} q\frac{dy}{dx} + y\frac{dq}{dx} - p - x &= 0, \\ \frac{dp}{dx} + 1 &= 0, \\ \frac{dz}{dx} - p - q\frac{dy}{dx} &= 0; \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} q\left(\frac{dy}{dx}\right) + y\left(\frac{dq}{dx}\right) &= 0, \\ q\left(\frac{dp}{dx}\right) + (x+p)\left(\frac{dq}{dx}\right) + q &= 0, \\ \left(\frac{dz}{dx}\right) - p - q\left(\frac{dy}{dx}\right) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (B)$$

Le premier système donne une combinaison intégrable

$$p + x = \alpha,$$

déduite de la deuxième équation de ce système (A).

Le second système donne aussi une combinaison intégrable

$$q(p + x) = \beta,$$

déduite de la deuxième équation de ce système (B).

Nous pouvons donc appliquer ce que nous avons dit au n° 83.

Nous aurons par division,

$$q = \frac{\beta}{\alpha};$$

en outre,

$$p = \alpha - x.$$

Par conséquent

$$z = \alpha x - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta}{\alpha} y + \psi = \omega.$$

L'intégrale générale sera représentée par les équations

$$z = \alpha x - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta}{\alpha} y + \psi = \omega,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} = x - \frac{\beta}{\alpha^2}y + \frac{d\psi}{d\alpha} = 0,$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial\beta} = \frac{y}{\alpha} + \frac{d\psi}{d\beta} = 0.$$

La fonction ψ est déterminée par l'équation

$$2S\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} + U = 0.$$

Or, on trouve facilement

$$\omega' = \alpha - x, \qquad \omega_, = \frac{\beta}{\alpha},$$

$$\omega'' = -1, \quad \omega'_, = 0, \quad \omega_{,,} = 0,$$

$$\frac{\partial\omega'}{\partial\alpha} = 1, \quad \frac{\partial\omega'}{\partial\beta} = 0, \quad \frac{\partial\omega_,}{\partial\alpha} = -\frac{\beta}{\alpha^2}, \quad \frac{\partial\omega_1}{\partial\beta} = \frac{1}{\alpha},$$

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\alpha\partial\beta} = -\frac{y}{\alpha^2} + \frac{d^2\psi}{d\alpha d\beta}.$$

Par conséquent,

$$S = \frac{1}{2}, \qquad U = \frac{y}{\alpha^2},$$

et l'équation en ψ devient

$$\frac{d^2\psi}{d\alpha d\beta} = 0.$$

Mais de cette équation on tire :

$$\psi = \varphi(\alpha) + \chi(\beta).$$

L'intégrale générale sera donc représentée par les trois équations suivantes :

$$z = \alpha x - \frac{x^2}{2} + \frac{\beta y}{\alpha} + \varphi(\alpha) + \chi(\beta),$$

$$x - \frac{\beta}{\alpha^2}y + \varphi'(\alpha) = 0,$$

$$\frac{y}{\alpha} + \chi'(\beta) = 0.$$

VII.

GÉNÉRALISATION DE LA MÉTHODE DE MONGE. — EXTENSION DE CETTE MÉTHODE A L'ÉQUATION

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0.$$

98. On peut dans le cas de l'équation biordinale

$$Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

trouver des équations analogues à celles de *Monge*, et qui s'y réduisent, lorsque l'on fait $N = 0$.

Si, au moyen des équations (12), on élimine r, t, de (85), il vient :

$$\left.\begin{aligned} &Hdpdy + Ldqdx + Mdxdy + Ndpdq \\ &\quad - S[Hdy^2 - 2Kdxdy + Ldx^2 + N(dqdy + dpdx)] = 0; \end{aligned}\right\} (125)$$

en égalant à zéro, comme au n° 7, le terme indépendant de s, et le coefficient de s, on trouve les deux équations

$$\left.\begin{aligned} &Hdy^2 - 2Kdxdy + Ldx^2 + N(dqdy + dpdx) = 0, \\ &Hdpdy + Ldqdy + Mdxdy + Ndpdq = 0. \end{aligned}\right\} (126)$$

99. Proposons-nous actuellement de décomposer ce système en d'autres systèmes linéaires (*). Dans ce but, nous multiplierons la première par λ, et nous y ajouterons la seconde, ce qui nous donnera

$$\left.\begin{aligned} &H\lambda dy^2 + (M - 2K\lambda)\,dxdy + L\lambda dx^2 + N\lambda(dqdy + dpdx) \\ &\quad + Ldqdx + Hdpdy + Ndpdq = 0. \end{aligned}\right\} (127)$$

Comme les termes en dp^2 et dq^2 ne figurent pas dans cette

(*) M. Boole a indiqué un moyen de généraliser la méthode de Monge. Sa méthode diffère cependant en certains points de celle que j'expose ici : je donnerai plus loin en note celle que j'ai employée. Le travail de M. Boole est inséré dans le Journal de Crelle, t. LXI, p. 330, *Ueber eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.*

équation nous pourrons la décomposer en deux facteurs linéaires, et lui donner la forme

$$(\mathrm{H}dy + mdx + ndq)(\lambda dy + m'dx + n'dp) = 0. \quad . \quad (128)$$

La comparaison des coefficients de (127) et (128) nous donne

$$\begin{aligned} m\lambda + m'\mathrm{H} &= \mathrm{M} - 2\mathrm{K}\lambda, & nm' &= \mathrm{L}, \\ mm' &= \mathrm{L}\lambda, & nn' &= \mathrm{N}, \\ n\lambda &= \mathrm{N}\lambda, & mn' &= \mathrm{N}\lambda, \\ & & \mathrm{H}n' &= \mathrm{H}. \end{aligned}$$

On en tire facilement :

$$n' = 1, \quad n = \mathrm{N}, \quad m' = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}, \quad \lambda = \frac{m}{\mathrm{N}};$$

en vertu de ces valeurs, la première de ces équations devient

$$m^2 + 2\mathrm{K}m + \mathrm{HL} - \mathrm{MN} = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (129)$$

Ces valeurs étant substituées dans (128), on obtient :

$$(\mathrm{H}dy + mdx + \mathrm{N}dq)(mdy + \mathrm{L}dx + \mathrm{N}dp) = 0;$$

Comme l'équation (129) donne deux valeurs pour m,

$$m = -\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{K}^2 - \mathrm{HL} + \mathrm{MN}} = -\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}},$$

il en résulte les deux systèmes compris dans l'équation

$$\left[\mathrm{H}dy - \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right)dx + \mathrm{N}dq\right]\left[\mathrm{L}dx - \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right)dy + \mathrm{N}dp\right] = 0.$$

100. Il est facile de voir que l'on peut satisfaire à cette dernière de quatre manières différentes, en annulant en même temps un facteur de chacune des parenthèses. On obtient ainsi quatre systèmes linéaires auxquels se ramène l'intégration de l'équation (85).

Or, si l'on prend le système linéaire

$$\begin{aligned} \mathrm{H}dy - \left(\mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}}\right)dx + \mathrm{N}dq &= 0, \\ \mathrm{H}dy - \left(\mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}}\right)dx + \mathrm{N}dq &= 0, \end{aligned}$$

on en conclut, si G n'est pas nul, le suivant :

$$\begin{aligned} \mathrm{H}dy + \mathrm{N}dq &= 0, \\ dx &= 0. \end{aligned}$$

Mais ce système ne peut évidemment satisfaire à (85) puisqu'il ne renferme pas K, L, M.

D'ailleurs, en éliminant dx et dy, au moyen des équations (12), on obtient :

$$(\mathrm{H} + \mathrm{N}t)(rt - s^2) = 0.$$

De même, on ne pourra pas prendre le système linéaire

$$\mathrm{L}dx - \left(\mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}}\right)dy + \mathrm{N}dp = 0,$$
$$\mathrm{L}dx - \left(\mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}}\right)dy + \mathrm{N}dp = 0,$$

qui nous conduirait à l'équation

$$(\mathrm{N}r + \mathrm{L})(rt - s^2) = 0.$$

Au contraire, il est facile de s'assurer que les deux systèmes

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}dy - \left(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}}\right)dx + \mathrm{N}dq = 0, \\ \mathrm{L}dx - \left(\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}\right)dy + \mathrm{N}dp = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (130)$$

auxquels on joindra

$$dz - pdx - qdy = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (131)$$

satisfont à l'équation proposée (85). En effet, en éliminant entre les équations (132) et (12), dp, dq, dx, dy, on trouve :

$$\mathrm{N}\left[\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2)\right] = 0.$$

101. Les équations (130) sont celles que nous avons trouvées (n° 57) par la méthode d'*Ampère*. Ainsi, tout ce travail d'*Ampère*, que nous avons déjà simplifié en modifiant la notation de cet auteur, pouvait se déduire sans peine de la conception de *Monge* (*).

(*) Le moyen que j'ai employé pour parvenir à ces équations est tout à fait différent de celui qui précède; il est beaucoup plus expéditif. Si l'on remplace dq et dp par leurs valeurs (12), on obtient :

$$dqdy + dpdx = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2.$$

En substituant dans la première équation (126), on trouve :

$$(\mathrm{H} + \mathrm{N}t)dy^2 - 2(\mathrm{K} - \mathrm{N}s)dxdy + (\mathrm{L} + \mathrm{N}r)dx^2 = 0;$$

102. **Remarque I.** — On peut donner une autre forme aux équations (130). En effet, prenons le système

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}dy - m_1 dx + \mathrm{N}dq = 0, \\ \mathrm{L}dx - m_2 dy + \mathrm{N}dp = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132)$$

dans lequel m_1, m_2 sont les deux racines de l'équation (129) prises en signes contraires. Nous aurons, puisque

$$m_1 m_2 = \mathrm{HL} - \mathrm{MN},$$

en éliminant dy entre ces équations (132), le système suivant :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}dy - m_1 dx + \mathrm{N}dq = 0, \\ \mathrm{M}dx + \mathrm{H}dp + m_2 dq = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (132^{bis})$$

On pourrait d'ailleurs, par des éliminations convenables, trouver un grand nombre de systèmes par lesquels on peut remplacer (132).

de cette dernière on tire :

$$dy = \frac{\mathrm{K} - \mathrm{N}s \pm \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{H} + \mathrm{N}t}\, dx,$$

ou bien :

$$dx = \frac{\mathrm{K} - \mathrm{N}s \mp \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{L} + \mathrm{N}r}\, dy.$$

Or, en vertu des équations (12), ces équations se réduisent aux suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}dy + \mathrm{N}dq - (\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}})\, dx = 0, \\ \mathrm{L}dx + \mathrm{N}dp - (\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}})\, dy = 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130^{bis})$$

La seconde équation (126) donne encore

$$dq\,(\mathrm{L}dx + \mathrm{N}dp) + dy\,(\mathrm{H}dp + \mathrm{M}dx) = 0,$$

ou, à cause de la seconde équation (130^{bis}),

$$dq\,(\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}})\, dy + dy\,(\mathrm{H}dp + \mathrm{M}dx) = 0.$$

Par conséquent

$$\mathrm{H}dp + \mathrm{M}dx + (\mathrm{K} \mp \sqrt{\mathrm{G}})\, dq = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130^{ter})$$

Cette même équation (126) donne aussi

$$dp\,(\mathrm{H}dy + \mathrm{N}dq) + dx\,(\mathrm{M}dy + \mathrm{L}dq) = 0,$$

ou, en vertu de la première équation (130^{bis})

$$\mathrm{M}dy + \mathrm{L}dq + (\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}})\, dp = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (130^{ter})$$

103. **Remarque II.** — On peut aussi déduire de (130) les équations de *Monge*, en y introduisant la condition $N = 0$. La première de ces équations nous donne :

$$H dy - \left(K \mp \sqrt{G}\right) dx = 0.$$

c'est la première équation (16) de *Monge*.

La seconde ne prend pas la forme que nous avons trouvée (n° 8). Mais, si, avant de faire $N = 0$, on élimine dy entre les équations (130), on obtient la seconde équation (132^{bis})

$$M dx + H dp + \left(K \pm \sqrt{G}\right) dq = 0;$$

en multipliant cette dernière par $K \mp \sqrt{G}$, on obtient :

$$M\left(K \mp \sqrt{G}\right) dx + H\left(K \mp \sqrt{G}\right) dp + (HL - MN)\, dq = 0.$$

Or, si l'on fait $N = 0$ dans cette dernière, il vient :

$$M\left(K \mp \sqrt{G}\right) dx + H\left(K \mp \sqrt{G}\right) dp + HL dq = 0;$$

c'est la seconde équation (16) dans laquelle on a remplacé m par $\frac{K \mp \sqrt{G}}{H}$.

104. Avant d'examiner le cas $M = 0$, c'est-à-dire l'équation

$$Hr + 2Ks + Lt + N(rt - s^2) = 0,$$

nous ferons encore subir une transformation à la seconde des équations (130).

En la multipliant par $K \mp \sqrt{G}$, on a :

$$L\left(K \mp \sqrt{G}\right) dx - (K^2 - G)\, dy + N\left(K \mp \sqrt{G}\right) dp = 0,$$

ou bien :

$$L\left(K \mp \sqrt{G}\right) dx - (HL - MN) dy + N\left(K \mp \sqrt{G}\right) dp = 0.$$

Si, dans cette dernière équation, et dans la première (130), nous faisons $M = 0$, il vient le système suivant :

$$\left.\begin{aligned} H dy - \left(K \mp \sqrt{G}\right) dx + N dq &= 0. \\ L\left(K \mp \sqrt{G}\right) dx - HL dy + N\left(K \mp \sqrt{G}\right) dp &= 0, \\ dz - p dx - q dy &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (133)$$

En désignant par m l'une des racines de l'équation

$$m^2 + 2\mathrm{K}m + \mathrm{HL} = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134)$$

on aura deux systèmes compris dans le suivant :

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{H}dy + mdx + \mathrm{N}dq &= 0, \\ \mathrm{L}mdx + \mathrm{HL}dy + \mathrm{N}mdp &= 0, \\ dz - pdx - qdy &= 0. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (133^{bis})$$

105. *Applications.* — 1° Soit l'équation biordinale

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t + \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(rt-s^2) + (1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

L'équation (129) donne

$$m^2 + 2pqm + p^2q^2 = 0;$$

d'où l'on déduit

$$m = -pq.$$

Par suite, nous aurons, d'après les formules (130), le système

$$(1+q^2)\,dy + pqdx + \frac{dq}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

$$(1+q^2)\,dx + pqdy + \frac{dp}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

dont il faudra trouver deux solutions communes.

Or, en éliminant dy entre ces équations, on obtient :

$$dx - \frac{(1+p^2)\,dp - pqdq}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = 0,$$

d'où

$$x - \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = a;$$

de même, l'élimination de dx donne :

$$y - \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = b.$$

L'équation (131) donne alors, en remplaçant p et q par leurs valeurs, et mettant $\varphi(a)$ au lieu de b,

$$dz - \frac{(x-a)\,dx + (y-\varphi(a))\,dy}{\sqrt{1-(x-a)^2-(y-\varphi(a))^2}} = 0.$$

On en déduit

$$z - c = \sqrt{1-(x-a)^2-(y-\varphi(a))^2},$$

pour la solution complète (partielle) de la proposée. La solution générale s'obtiendra en éliminant a entre les deux équations :

$$(x-a)^2 + (y-\varphi(a))^2 + (z-\psi(a))^2 = 1,$$
$$(x-a) + (y-\varphi(a))\,\varphi'(a) + (z-\psi(a))\,\psi'(a) = 0.$$

2° Soit encore l'équation biordinale

$$rt - s^2 + a^2 = 0.$$

Elle nous donne les deux systèmes

$$\left.\begin{aligned} adx + dq &= 0,\\ -ady + dp &= 0,\end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} -adx + dq &= 0,\\ ady + dp &= 0.\end{aligned}\right\}$$

On tire de là les deux intégrales premières

$$p - ay = \varphi(q + ax),$$
$$q - ax = \psi(p + ay).$$

Une seule de ces deux équations pourra servir pour la détermination de l'intégrale générale de la proposée : il suffit, pour cela, de lui appliquer la méthode de *Jacobi*.

Ainsi, de la première on déduit :

$$p = ay + \varphi(q + ax);$$

d'où

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-\varphi'} = \frac{dq}{a}.$$

Par conséquent, l'équation

$$q - ax = c,$$

sera une solution particulière de l'équation primordinale.

On obtient alors :

$$p = ay + \varphi(c + 2ax),$$
$$q = ax + c.$$

Par suite,

$$dz = \left[ay + \varphi(c + 2ax)\right] dx + (c + ax)\, dy.$$

En intégrant, on trouve l'intégrale complète

$$z = axy + cy + \psi(c + 2ax) + \xi(c),$$

et l'intégrale générale s'obtiendra par l'élimination de c entre les équations :

$$z = axy + cy + \psi(c + 2ax) + \xi(c),$$
$$0 = y + \psi'(c + 2ax) + \xi'(c).$$

VIII.

MÉTHODE DE M. DE MORGAN.

106. Je crois qu'il ne sera pas inutile de donner un aperçu de la méthode de M. *de Morgan*. Comme je l'ai dit dans l'introduction, cet auteur a imaginé (*) une notation d'une simplicité remarquable pour la représentation des longues formules auxquelles on est conduit dans l'exposition de cette théorie. Mais cette notation présente un grand désavantage dans les calculs : il est difficile, pour ne pas dire impossible, d'y lire les transformations nécessaires pour déduire les formules les unes des autres. Il faut chaque fois faire tous les développements.

107. Avant d'entrer dans les détails de la théorie, nous croyons nécessaire d'indiquer les notations dont nous ferons usage.

1° Si φ est une fonction de x, nous écrirons :

$$\varphi_x = \frac{d\varphi}{dx};$$

(*) De Morgan, *On some points in the theory of differential equations*, Transactions of the Cambridge philosophical society, t. IX, p. 516.

de même, si φ est une fonction de y,

$$\varphi_y = \frac{d\varphi}{dy}.$$

2° Si φ est une fonction de x, z, cette dernière étant une fonction de x, nous poserons :

$$\varphi_{x/z} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p = \varphi_x + \varphi_z . p;$$

de même, si φ est une fonction de y, z, cette dernière étant une fonction de y,

$$\varphi_{y/z} = \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q = \varphi_y + \varphi_z . q.$$

3° Si φ est une fonction de x, z, p, q, ces trois dernières étant des fonctions de x, on écrira

$$\varphi_{x/z,p,q} = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dz}p + \frac{d\varphi}{dp}r + \frac{d\varphi}{dq}s = \varphi_x + \varphi_z . p + \varphi_p . r + \varphi_q . t;$$

de même,

$$\varphi_{y/z,p,q} = \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}q + \frac{d\varphi}{dp}s + \frac{d\varphi}{dq}t = \varphi_y + \varphi_z . q + \varphi_p . s + \varphi_q . t.$$

4° Nous emploierons aussi une notation symbolique pour représenter les déterminants (*); ainsi, nous écrirons

$$(AB_{x/y}) = A_x B_y - A_y B_x,$$

en supposant que

$$A_x = A_{x/z} = A_x + A_z . p, \qquad B_x = B_{x/z} = B_x + B_z . p,$$
$$A_y = A_{y/z} = A_y + A_z . q, \qquad B_y = B_{y/z} = B_y + B_z . q.$$

Nous pourrons même supprimer les crochets, et poser

$$AB_{x/y} = A_x B_y - A_y B_x.$$

(*) De Morgan, *On some points*, etc., Transactions of the Cambridge society, t. IX, p. 527.

Nous aurons de la même manière :

$$\mathrm{ABC}_{pqr} = \mathrm{A}_p \cdot \mathrm{BC}_{qr} + \mathrm{B}_p \cdot \mathrm{CA}_{qr} + \mathrm{C}_p \cdot \mathrm{AB}_{qr},$$
$$\mathrm{ABCD}_{pqrs} = \mathrm{A}_p \cdot \mathrm{BCD}_{qrs} - \mathrm{B}_p \cdot \mathrm{CDA}_{qrs} + \mathrm{C}_p \cdot \mathrm{DAB}_{qrs} - \mathrm{D}_p \cdot \mathrm{ABC}_{qrs},$$

et ainsi de suite.

Enfin, nous remarquerons la formule suivante dont nous aurons besoin dans la suite, et qu'il est facile de démontrer :

$$\mathrm{AB}_{ab} \cdot \mathrm{AB}_{cd} = \mathrm{AB}_{ac} \cdot \mathrm{AB}_{bd} + \mathrm{AB}_{ad} \cdot \mathrm{AB}_{cb}.$$

108. Ces divers symboles étant admis, nous pouvons aborder la théorie, et dans ce but, nous reprendrons l'équation biordinale

$$\mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Soit

$$\mathrm{B}(x, y, z, p, q) = \varpi\left(\mathrm{A}(x, y, z, p, q)\right), \quad (^*)$$

une intégrale du premier ordre de la proposée, cette dernière résultant de l'élimination de ϖ entre les dérivées de l'intégrale première prises par rapport à x et y.

Nous aurons évidemment les équations symboliques :

$$\mathrm{B}_{x/z,p,q} = \varpi' \cdot \mathrm{A}_{x/z,p,q},$$
$$\mathrm{B}_{y/z,p,q} = \varpi' \cdot \mathrm{A}_{y/z,p,q};$$

d'où

$$\mathrm{A}_{x/z,p,q} \cdot \mathrm{B}_{y/z,p,q} - \mathrm{A}_{y/z,p,q} \cdot \mathrm{B}_{x/z,p,q} = 0.$$

En développant, il vient :

$$(\mathrm{A}_x + \mathrm{A}_z p + \mathrm{A}_p r + \mathrm{A}_q s)(\mathrm{B}_y + \mathrm{B}_z q + \mathrm{B}_p s + \mathrm{B}_q t)$$
$$- (\mathrm{A}_y + \mathrm{A}_z q + \mathrm{A}_p s + \mathrm{A}_q t)(\mathrm{B}_x + \mathrm{B}_z p + \mathrm{B}_p r + \mathrm{B}_q s) = 0.$$

Cette équation peut être mise sous la forme

$$\mathrm{A}_{x/z}\mathrm{B}_{y/z} - \mathrm{B}_{x/z}\mathrm{A}_{y/z} + \left\{\mathrm{A}_p\mathrm{B}_{y/z} - \mathrm{B}_p\mathrm{A}_{y/z}\right\} r$$
$$+ \left\{(\mathrm{A}_{x\,z}\mathrm{B}_p - \mathrm{A}_p\mathrm{B}_{x/z}) + (\mathrm{A}_q\mathrm{B}_{y/z} - \mathrm{B}_q\mathrm{A}_{y/z})\right\} s$$
$$+ (\mathrm{A}_{x/z}\mathrm{B}_q - \mathrm{A}_q\mathrm{B}_{x/z})\, t + (\mathrm{A}_p\mathrm{B}_q - \mathrm{A}_q\mathrm{B}_p)(rt - s^2) = 0;$$

(*) De Morgan, *On some points in the theory*, etc., p. 545.

en écrivant, pour simplifier encore, A_x, A_y, B_x, B_y, au lieu de

$$A_{x/z} = A_x + A_z p', \quad A_{y/z} = A_y + A_z q, \text{ etc.},$$

on trouve :

$$A_xB_y - A_yB_x + (A_pB_y - A_yB_p)\,r + \{(A_xB_p - A_pB_x) + (A_qB_y - A_yB_q)\}\,s + (A_xB_q - A_qB_x)\,t + (A_pB_q - A_qB_p)\,(rt - s^2) = 0.$$

Enfin, si nous adoptons la notation de M. *de Morgan* pour représenter les déterminants, nous aurons :

$$AB_{xy} + AB_{py}r + (AB_{xp} + AB_{qy})\,s + AB_{xq}t + AB_{pq}(rt - s^2) = 0, \quad (134)$$

équation qui a la forme de la proposée (*). En identifiant ces équations (85) et (134), on aura évidemment

$$\left.\begin{aligned} AB_{xy} = \lambda M, \quad AB_{pq} = \lambda H, \quad AB_{xp} + AB_{qy} = 2\lambda K, \\ AB_{xq} = \lambda L, \quad AB_{pq} = \lambda N. \end{aligned}\right\} \quad (135)$$

Or, en posant

$$AB_{xp} = m \,.\, AB_{qy},$$

nous obtiendrons l'identité

$$4mK^2 = (1 + m)^2 (HL - MN) \text{ (**)}. \quad (136)$$

(*) Ici se montre dans tout son jour, l'avantage de la notation morganienne. Ainsi, cette équation (134) équivaut à la suivante :

$$\left(\frac{dA}{dx} + p\frac{dA}{dz}\right)\left(\frac{dB}{dy} + q\frac{dB}{dz}\right) - \left(\frac{dA}{dy} + q\frac{dA}{dz}\right)\left(\frac{dB}{dx} + p\frac{dB}{dz}\right)$$
$$+ \left[\frac{dA}{dp}\left(\frac{dB}{dy} + q\frac{dB}{dz}\right) - \frac{dB}{dp}\left(\frac{dA}{dy} + q\frac{dA}{dz}\right)\right] r$$
$$+ \left[\begin{aligned} &\frac{dA}{dq}\left(\frac{dB}{dy} + q\frac{dB}{dz}\right) - \frac{dB}{dq}\left(\frac{dA}{dy} + q\frac{dA}{dz}\right) \\ &+ \frac{dB}{dp}\left(\frac{dA}{dx} + p\frac{dA}{dz}\right) - \frac{dA}{dp}\left(\frac{dB}{dx} + p\frac{dB}{dz}\right) \end{aligned}\right] s$$
$$+ \left[\frac{dB}{dq}\left(\frac{dA}{dx} + p\frac{dA}{dz}\right) - \frac{dA}{dq}\left(\frac{dB}{dx} + p\frac{dB}{dz}\right)\right] t$$
$$+ \left(\frac{dA}{dp}\frac{dB}{dq} - \frac{dA}{dq}\frac{dB}{dp}\right)(rt - s^2) = 0.$$

(**) En effet, on trouve

$$(AB_{qy} + AB_{xp})^2 = (1 + m)^2 (AB_{qy})^2;$$

On pourra remplacer les cinq équations (135) par les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} &AB_{py} = \lambda H, \quad AB_{xq} = \lambda L, \quad AB_{pq} = \lambda N, \\ &AB_{xp} = 2\,\frac{m}{1+m}\,\lambda K, \quad AB_{qy} = \frac{2}{1+m}\,\lambda K, \end{aligned}\right\} \quad . \quad (135^{bis})$$

puisque l'on déduira de ces dernières, combinées avec (85) et (134),

$$AB_{xy} = \lambda M.$$

Or, on sait, d'après la notation de M. *de Morgan*, que

$$AAB_{xpq} = A_x . AB_{pq} + A_x . BA_{pq} + B_x . AA_{pq},$$

et comme

$$BA_{pq} = - AB_{pq}, \quad \text{et} \quad AA_{pq} = 0,$$

il en résulte :

$$AAB_{xpq} = 0;$$

de même,

$$AAB_{ypq} = 0.$$

Mais on a aussi

$$\begin{aligned} AAB_{xpq} &= A_x (A_p B_q - A_q B_p) + A_x (B_p A_q - A_p B_q) \\ &\quad + B_x (A_p A_q - A_q A_p) \\ &= A_x (A_q B_p - A_p B_q) + A_p (A_x B_q - A_q B_x) \\ &\quad - A_q (A_x B_p - A_p B_x), \end{aligned}$$

ou bien

$$AAB_{xpq} = A_x . AB_{qp} + A_p . AB_{xq} - A_q . AB_{xp} = 0;$$

de même,

$$AAB_{ypq} = A_y . AB_{qp} + A_p . AB_{yq} - A_q . AB_{yp} = 0.$$

d'où

$$\begin{aligned} m (AB_{qy} + AB_{xp})^2 &= (1+m)^2 . mAB_{qy} . AB_{qy} \\ &= (1+m)^2 . AB_{xp} . AB_{qy}. \end{aligned}$$

Or, on sait, par la théorie des déterminants, que

$$AB_{xp} . AB_{qy} = AB_{xq} . AB_{py} + AB_{xy} . AB_{qp};$$

donc

$$m (AB_{qy} + AB_{xp})^2 = (1+m)^2 [AB_{xq} . AB_{py} + AB_{xy} . AB_{qp}],$$

ou

$$4mK^2 = (1+m)^2 (HL - MN).$$

Nous aurons ainsi les deux équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} -\mathrm{NA}_x + \mathrm{LA}_p - \frac{2m}{1+m}\mathrm{KA}_q = 0, \\ -\mathrm{NA}_y - \frac{2}{1+m}\mathrm{KA}_p + \mathrm{HA}_q = 0, \end{aligned}\right\}$$

auxquelles devront satisfaire les fonctions A et B, qui donnent la solution du premier ordre, et dans lesquelles m est une racine de l'équation du second degré

$$4m\mathrm{K}^2 = (1+m)^2(\mathrm{HL} - \mathrm{MN}). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

109. Il en résulte que, pour trouver les solutions du premier ordre de l'équation biordinale (85), il faut chercher des solutions communes complètes du système d'équations primordinales simultanées

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{N}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx} + p\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right) - \mathrm{L}\frac{d\mathrm{V}}{dp} + \frac{2m}{1+m}\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dq} = 0, \\ \mathrm{N}\left(\frac{d\mathrm{V}}{dy} + q\frac{d\mathrm{V}}{dz}\right) - \mathrm{H}\frac{d\mathrm{V}}{dq} + \frac{2}{1+m}\mathrm{K}\frac{d\mathrm{V}}{dp} = 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (157)$$

dans lequel x, y, z, p, q seront les variables indépendantes et m une racine de l'équation du second degré (156).

110. On vérifie facilement que les équations (157) sont identiquement les mêmes que celles que nous avons trouvées (n° 61).

En effet, de l'équation (156) on tire :

$$m = \frac{-\mathrm{HL} + \mathrm{MN} + 2\mathrm{K}^2 \pm 2\mathrm{K}\sqrt{\mathrm{K}^2 - \mathrm{HL} + \mathrm{MN}}}{\mathrm{HL} - \mathrm{MN}},$$

ou, en posant

$$\mathrm{K}^2 - \mathrm{HL} + \mathrm{MN} = \mathrm{G},$$

$$m = \frac{\left(\mathrm{K} \pm \sqrt{\mathrm{G}}\right)^2}{\mathrm{K}^2 - \mathrm{G}}.$$

Par conséquent, si m' et m'' sont les deux racines, on a :

$$m' = \frac{\mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}}}, \qquad m'' = \frac{\mathrm{K} - \sqrt{\mathrm{G}}}{\mathrm{K} + \sqrt{\mathrm{G}}}.$$

On trouve ensuite :

$$\frac{m'}{1+m'}=\frac{K+\sqrt{G}}{2K},\qquad \frac{1}{1+m'}=\frac{K-\sqrt{G}}{2K},$$
$$\frac{m''}{1+m''}=\frac{K-\sqrt{G}}{2K},\qquad \frac{1}{1+m''}=\frac{K+\sqrt{G}}{2K},$$

et les équations (137) deviennent, comme au n° 61,

$$N\frac{dV}{dx}+Np\frac{dV}{dz}-L\frac{dV}{dp}+\left(K\pm\sqrt{G}\right)\frac{dV}{dq}=0,$$
$$N\frac{dV}{dy}+Nq\frac{dV}{dz}-H\frac{dV}{dq}+\left(K\mp\sqrt{G}\right)\frac{dV}{dp}=0.$$

IX.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS BIORDINALES DE FORME QUELCONQUE.

111. Notre travail devrait évidemment se terminer par l'exposé d'une méthode à suivre pour intégrer les équations biordinales de forme quelconque. Malheureusement, ce sujet n'a pour ainsi dire été traité par aucun géomètre jusque maintenant. Tout ce que l'on connaît sur l'intégration de ces équations se réduit à deux méthodes qui, d'ailleurs, ne sont guère applicables en général. La première est due à *Legendre* (*), la seconde à *Ampère* (**).

112. Méthode de Legendre. — On suppose que l'équation non linéaire est de la forme

$$r=f(s,t). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138)$$

f désignant une fonction quelconque, ne renfermant pas p, q, et l'on cherche à la ramener à une équation linéaire.

(*) *Mémoires de l'Académie des sciences*, 1787, p. 317.
(**) *Journal de l'École polytechnique*, 18e cahier.

Des équations (12), on déduit :

$$p = rx + sy - \int (x\,dr + y\,ds),$$
$$q = sx + ty - \int (x\,ds + y\,dt);$$

par suite, les expressions

$$x\,dr + y\,ds, \qquad x\,ds + y\,dt,$$

sont des différentielles exactes.

Si nous posons

$$x\,ds + y\,dt = d\omega,$$

x, y étant considérées comme des fonctions de s, t, nous aurons

$$x = \frac{d\omega}{ds}, \qquad y = \frac{d\omega}{dt}, \quad \ldots\ldots \quad (139)$$

Or, de l'équation proposée (138) on tire :

$$dr = S\,ds + T\,dt;$$

d'où

$$x\,dr + y\,ds = (Sx + y)\,ds + Tx\,dt.$$

Cette expression étant une différentielle exacte, on a :

$$\frac{d\,(Sx + y)}{dt} = \frac{d\,Tx}{ds};$$

ou bien, à cause de $\frac{dS}{dt} = \frac{dT}{ds}$,

$$S\,\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = T\,\frac{dx}{ds}.$$

Mais, en remplaçant x, y, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, on trouve l'équation biordinale suivante :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + S\,\frac{d^2\omega}{ds\,dt} - T\,\frac{d^2\omega}{ds^2} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (140)$$

Cette équation est linéaire puisque S, T sont des fonctions de s, t seulement. Elle servira à déterminer ω, et l'on déduira x, y, au moyen des relations (139).

Par conséquent,

$$q = sx + ty - \omega,$$
$$p = rx + sy - \int (x\,dr + y\,ds);$$

enfin,

$$z = px + qy - \int (x\,dp + y\,dq),$$

ou bien

$$z = px + qy - \int (rx\,dx + sx\,dy + sy\,dx + ty\,dy),$$
$$z = px + qy - \frac{rx^2}{2} + sxy + \frac{ty^2}{2} + \int \left(\frac{x^2}{2}\,dr + xy\,ds + \frac{y^2}{2}\,dt\right).$$

La quantité sous le signe $\int$ devra toujours être une différentielle exacte; par conséquent, on pourra toujours trouver l'intégrale primitive de la proposée (138).

115. Remarque. — Des équations précédentes on tire :

$$x = \varphi(s, t),$$
$$y = \psi(s, t),$$
$$z = \chi(s, t);$$

en éliminant s, t, entre ces dernières, on aura z en fonction de x, y. Ce sera l'intégrale générale de la proposée. Car, les fonctions φ, ψ, χ, renfermant chacune les deux fonctions arbitraires de l'intégrale générale de (140), z renfermera aussi deux fonctions arbitraires.

114. Méthode d'Ampère. — La méthode que nous avons exposée (n° 54) s'applique à toutes les équations biordinales qui admettent des intégrales intermédiaires.

Soit

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad \ldots \quad (141)$$

l'équation proposée.

Désignons par α une fonction de x, y, actuellement indéterminée, et remplaçons r, s, t, par les valeurs (86bis), il vient :

$$P + Q\frac{\frac{dq}{d\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha}} + R\left(\frac{\frac{dq}{d\alpha}}{\frac{dy}{d\alpha}}\right)^2 + \cdots = 0.$$

Cela fait, on détermine α de manière que l'on ait :

$$Q = 0, \quad R = 0, \ldots; \quad \ldots\ldots \quad (142)$$

d'où il suit :

$$P = 0.$$

Mais toutes ces équations (142) doivent se réduire à une seule, par exemple $Q = 0$. Les autres seront des identités, en vertu de la proposée, si celle-ci admet une intégrale intermédiaire.

Les deux équations

$$P = 0, \quad Q = 0,$$

où les variables sont x, α, donnent, par le changement de signe du radical renfermé dans $\frac{dy}{dx}$, deux autres équations où les variables sont x, β. Nous aurons ainsi entre les quantités x, y, z, p, q, r, s, t, α, β, les quatre équations renfermées dans

$$P = 0, \quad Q = 0;$$

en outre, les trois équations

$$dz = pdx + qdy,$$
$$dp = rdx + sdy,$$
$$dq = sdx + tdy,$$

et la proposée (141).

Ces huit équations nous permettront de déterminer huit de ces quantités en fonction des deux autres.

115. **Remarque.** — Dans ce cas, comme au n° 59, on pourra remplacer les équations dans lesquelles x, β sont les variables indépendantes par d'autres qui ne renferment plus que les variables indépendantes x, α.

116. *Application.* — L'équation

$$(pt - r)^2 = q^2 rt, \quad \ldots\ldots \quad (143)$$

nous donnera, en remplaçant r par sa valeur,

$$r = \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx} + t\left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

$$\left(\frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\right)^2+2t\left(\frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}\right)\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-p-\frac{q^2}{2}\right]$$
$$+\left[\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-p\right\}^2-q^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]t^2=0.$$

En égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de t, on a les deux équations suivantes :

$$\frac{dp}{dx}-\frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx}=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (144)$$
$$\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-p\right\}^2-q^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0,$$

dont il s'agit de trouver des combinaisons intégrables.

La seconde de ces équations nous donne :

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-q\frac{dy}{dx}-p=0,\\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2+q\frac{dy}{dx}-p=0.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (145)$$

Si l'on différentie cette dernière, il vient, en vertu de la précédente,

$$\left\{2\frac{dy}{dx}+q\right\}\frac{d^2y}{dx^2}=0;$$

or, de

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

on tire :

$$\frac{dy}{dx}=\alpha,$$

et

$$y=\alpha x+\varphi(\alpha). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (146)$$

La seconde équation (145) nous donne alors :

$$\alpha^2+q\alpha-p=0;$$

d'où

$$\alpha=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+p}. \quad \ldots\ldots \quad (147)$$

Par suite, en éliminant α entre (147) et (146), on a une intégrale du premier ordre de (145) :

$$2y + qx \pm x\sqrt{q^2 + 4p} = \varphi\left(q \pm \sqrt{q^2 + 4p}\right). \quad . \quad (148)$$

En intégrant cette équation primordinale (148), on obtiendra l'intégrale générale de la proposée.

117. **Remarque I.** — Le double signe du radical ne donne qu'une seule intégrale se rapportant aux deux nappes de la surface représentée par l'équation proposée (145).

118. **Remarque II.** — On pourrait aussi trouver une seconde intégrale du premier ordre de (145), en combinant (144) avec la première équation (145), x, β étant les variables indépendantes. C'est cette méthode qu'*Ampère* a employée : elle l'a conduit à représenter l'intégrale générale par les deux équations suivantes :

$$z + \frac{\alpha^4 x - 4\alpha^3\varphi(\alpha) + 2\alpha^4\varphi'(\alpha)}{5} + 4\int \alpha^3\varphi(\alpha)\,d\alpha = \psi\left(2\alpha x + \varphi(\alpha) + \alpha\varphi'(\alpha)\right),$$

$$y = \alpha^2 x + \alpha^2\varphi'(\alpha).$$

QA
374
G67

Physical &
Applied Sci.

Graindorge, Joseph
Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY